IV CIECITEC
IV Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica
9 a 11 de outubro de 2017
ISSN 2238-9237

MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE SANTA ROSA-RS

Graciela Elizabeth Bönmann Bertoldo[1], Aline Tampke[2], Rosângela Rommel Regner[3], Antônio Carlos Valdiero[4]

[1] UNIJUÍ/DCEEng/Campus Ijuí, e-mail: gracibertoldo@gmail.com
[2] UNIJUÍ/DCEEng/Campus Ijuí, e-mail: alinetampke@hotmail.com
[3] UNIJUÍ/DCEEng/Campus Ijuí, e-mail: rosangela.regner@gmail.com
[4] UNIJUÍ/NIMASS/Campus Panambi, e-mail: valdiero@unijui.edu.br

RESUMO: Este trabalho trata da modelagem matemática do crescimento populacional do município de Santa Rosa – RS. O objetivo é descrever a sequência de passos utilizados na formulação matemática do modelo Malthusiano contínuo do crescimento populacional e verificar sua validade mediante simulações computacionais. Os parâmetros utilizados no modelo matemático foram determinados através de censos demográficos divulgados pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) e foram considerados constantes. Para validação do modelo comparou-se os resultados obtidos nas simulações computacionais com dados empíricos, realizando ajustes na taxa de crescimento populacional a fim de aprimorar a curva resultante. Por fim solucionou-se o problema inicial aplicando o modelo obtido. Desse modo aprofundaram-se os conhecimentos em relação às etapas fundamentais da modelagem matemática de problemas reais, assim como sobre a simulação computacional de modelos, conceitos esses vistos no componente curricular de Modelagem Matemática I do curso de Mestrado em Modelagem Matemática da UNIJUÍ.

Palavras Chaves: Crescimento Populacional, Modelagem Matemática, Simulação Computacional.

1 INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática tem sido muito utilizada no meio científico e acadêmico. Por meio dela é possível encontrar soluções para diversos problemas reais e assim realizar previsões nos diferentes campos do conhecimento.

Quando se fala em modelagem matemática, é possível tomá-la tanto como estratégia de ensino e de aprendizagem, como um método científico de pesquisa muito eficaz.

No ensino, a Modelagem Matemática vem ocupando um espaço de grande prestígio, pois desenvolve um trabalho interdisciplinar, auxiliando no desenvolvimento dos conceitos específicos da matemática, de modo que o educando perceba as suas diversas aplicabilidades no mundo real.

Um dos autores mais renomados nessa área é Bassanezi, o qual é referência base para o desenvolvimento desse trabalho. Em suas obras ele situa e esclarece as etapas de uma boa modelagem matemática, tanto na área da educação como no meio científico.

Segundo Bassanezi (2004, p.16) “A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Biembengut e Hein (2003) ressaltam que essas interpretações matemáticas são importantes pois além de auxiliarem na resolução do problema em si, podem posteriormente dar suporte para outras teorias e aplicações.

Em outras palavras, utiliza-se a matemática para refletir sobre alguma parcela da realidade, extraindo da mesma, todos ou apenas alguns dados que influenciam no fenômeno que se quer analisar e formalizando-os por meio de sistemas artificiais que são chamados, na literatura, de modelos.

Para Bassanezi (2004, p.20) o uso de modelos matemáticos se justifica pela importância em se ter “uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas”.

Cabe ressaltar que um mesmo modelo pode ser “bom” para um pesquisador e pode não ser para outro, ou seja, a aplicabilidade de cada modelo depende substancialmente do contexto em que é desenvolvido.

Com isso, buscou-se estudar a respeito da dinâmica do crescimento de uma população humana, que segundo Bassanezi foi impulsionada pelo economista inglês T. R. Malthus (1798), que baseou seu modelo em dois postulados: (1) “O alimento é necessário à subsistência do homem”; (2) “A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente” (BASSANEZI, 2004, p.327).

Atualmente, o modelo matemático que descreve a dinâmica populacional, chamado de modelo de Malthus, assume, de acordo com Bassanezi (2004, p.327), “que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante”. Ou seja, o modelo de Malthus prevê o crescimento de uma população em condições ideais, sem fome, guerras, catástrofes, ou nenhum outro tipo de inibição do crescimento.

Contudo, baseando-se no referido autor e nas etapas que o mesmo delimita para uma boa modelagem, buscou-se modelar o crescimento populacional do município de Santa Rosa – RS, por meio do modelo de Malthus. Para isso utilizou-se de alguns dados dos censos demográficos de 2000, 2010 e de 2016 divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A partir desses dados procurou-se verificar a validade do modelo por meio de simulações computacionais e, da comparação com as estimativas publicadas no Diário Oficial da União.

Por fim pretende-se responder a seguinte pergunta: “Considerando que a área geográfica do município de Santa Rosa – RS permaneça constante e que sua população mantenha o mesmo ritmo de crescimento desde 2000, quanto tempo o município levará para duplicar a população residente em 2016?”.

2 METODOLOGIA/ DETALHAMENTO DAS ATIVIDADES

Como todo método de pesquisa, a modelagem matemática deve seguir uma sequência de etapas, que segundo Bassanezi (2004) se resumem em:

1. Experimentação – etapa na qual se processa os dados, podendo ser por meios experimentais ou não;

2. Abstração – etapa que leva à obtenção de um modelo. Nessa etapa ocorre o estabelecimento das variáveis de controle que influenciam o sistema, a problematização, formulação de hipóteses, e simplificação das mesmas, pois essas influenciam diretamente na complexidade do modelo a ser formulado;

3. Resolução – etapa em que se descreve o problema em uma linguagem matemática adequada;

4. Validação – é o processo em que se põem o modelo à prova, testando-o e confrontando-o com os dados empíricos do sistema. Nessa etapa pode ser realizado simulações computacionais com o auxílio de softwares adequados. Verificando assim a validade do modelo obtido de acordo com a complexidade do sistema e sugerindo ou não melhorias no modelo;

5. Modificação – nessa etapa se aplica as melhorias sugeridas anteriormente e, com isso se faz necessário validar novamente o modelo.

As simulações foram realizadas com o auxílio do software Matlab/Simulink, que utiliza uma estruturação em forma de diagrama de blocos, que segundo Garcia (2005) proporciona melhor clareza no entendimento do modelo matemático, sendo assim mais didático em seu ponto de vista.

Partindo da concepção de que o crescimento populacional trata-se da variação da população em função do tempo e, considerando que a razão entre a variação da população (P) e a variação do tempo (t) é diretamente proporcional à população atual, tem-se:

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \textbf{(1)}$$

Conhecida como Modelo de Malthus contínuo, onde k representa a constante de proporcionalidade, ou taxa de crescimento.

Esse modelo nada mais é do que uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de primeira ordem homogênea, e também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{P}(t) = kP(t)$$

$$\dot{P}(t) - kP(t) = 0$$

Para encontrar o valor da constante k basta resolver a EDO (1) pelo método de variáveis separáveis:

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \textbf{(1)}$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k \cdot dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados tem-se:

$$e^{\ln|P|} = e^{kt+C}$$

$$P(t) = e^{kt} \cdot e^{C}$$

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Substituindo $P(0) = P_i$ na equação acima encontra-se:

$$C = P_i$$

Assim:

$$P(t) = P_i \cdot e^{kt}$$

Dividindo toda a equação por P_i, e aplicando a função exponencial:

$$\ln\left|\frac{P(t)}{P_i}\right| = \ln\left|e^{kt}\right|$$

$$\ln\left|\frac{P(t)}{P_i}\right| = k \cdot t$$

Por fim, dividindo ambos os lados por t, encontra-se a equação da taxa de crescimento populacional de um período até outro:

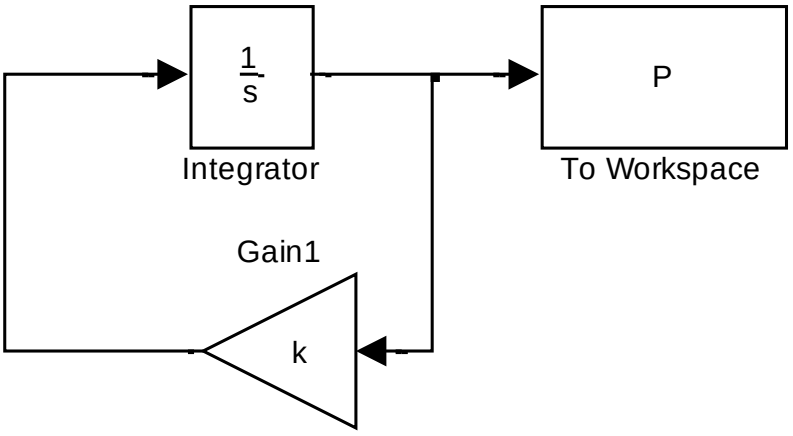
$$k = \frac{\ln\left|\frac{P(t)}{P_i}\right|}{t} \qquad \textbf{(2)}$$

Os parâmetros e variáveis do sistema foram obtidos recorrendo ao resultado do Censo Demográfico 2000 e 2010 do município de Santa Rosa. Utilizou-se a população nesses dois períodos para calcular a taxa de crescimento, a partir da equação (2), tomando como P_i=65034 e P(10)=68587.

$$k = \frac{\ln\left|\frac{68587}{65034}\right|}{10} = 0{,}00531928$$

Para realizar as simulações computacionais do modelo malthusiano fez-se primeiramente a construção do diagrama de blocos correspondente à equação (1) com o auxílio do software Matlab/Simulink (Figura 1). Em seguida definiu-se o método numérico de integração a ser utilizado, Runge-Kutta de ordem 4 (ode4) com um passo fixo de integração de 1e-4.

Figura 1 – Diagrama de blocos do modelo matemático malthusiano do crescimento populacional



Fonte: Elaborado pelos autores,2017.

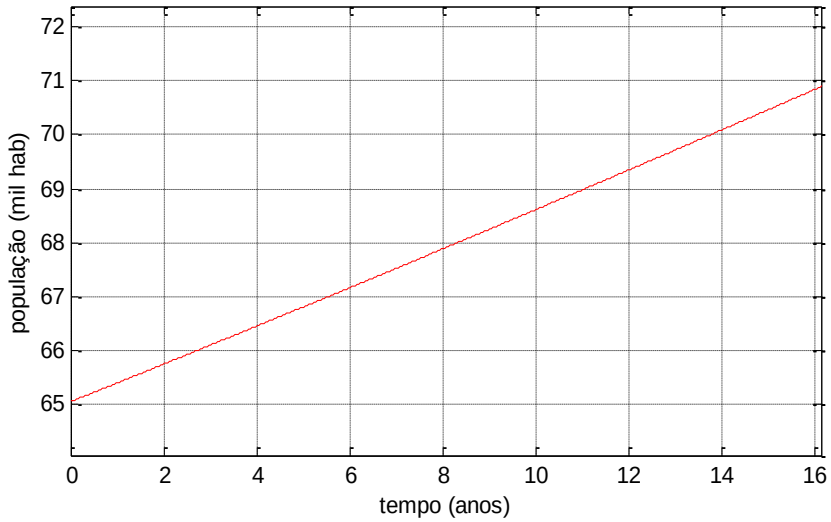
Além do diagrama de blocos foi necessário criar um arquivo no Matlab com os dados iniciais do problema e outro arquivo para gerar a curva do crescimento populacional a partir do modelo de Malthus.

3 RESULTADOS E ANÁLISE

Para validar o modelo do crescimento populacional do município de Santa Rosa – RS fez-se uma simulação a partir do ano de 2000 tomando como

base o crescimento obtido entre os anos de 2000-2010 e comparou o resultado (Figura 2) com dados das estimativas populacionais para o ano de 2016 segundo o IBGE.

Figura 2 – Crescimento Populacional do Município de Santa Rosa dados Pi=65034 e k=0.0053469

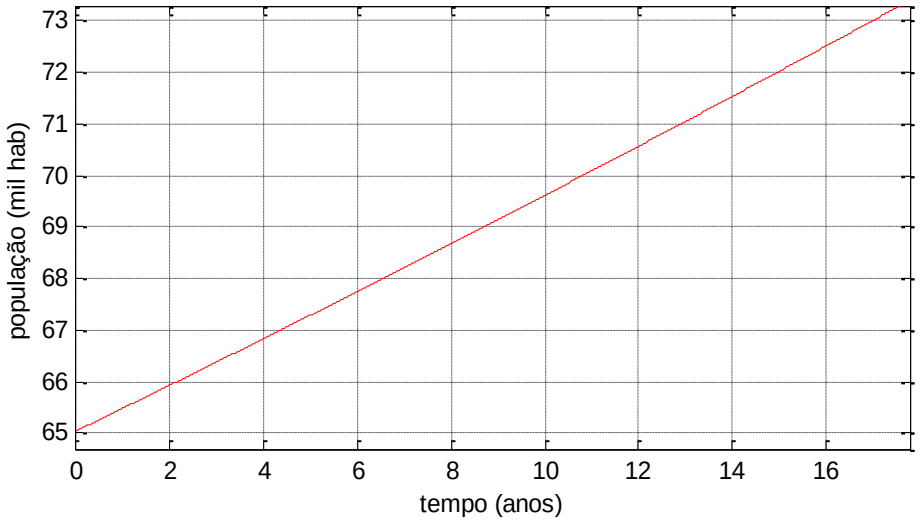


Fonte: Elaborado pelos autores,2017.

Segundo as estimativas de população publicadas no D.O.U, o município no ano de 2016 contaria com 72.504 habitantes. Analisando o gráfico (Figura 2), percebe-se que segundo o modelo a população desse município encontrar-se-ia abaixo de 71 mil habitantes, diferença essa bastante elevada, considerando que o município não é muito populoso, se comparado com as grandes capitais.

Dessa forma utilizou-se de procedimentos computacionais para ajustar a curva, chegando assim a uma taxa de crescimento de 0.67% ao ano (Figura 3), validando assim o modelo matemático malthusiano.

Figura 3 - Crescimento populacional do município de Santa Rosa dado Pi=65034 hab. e k=0.0067957

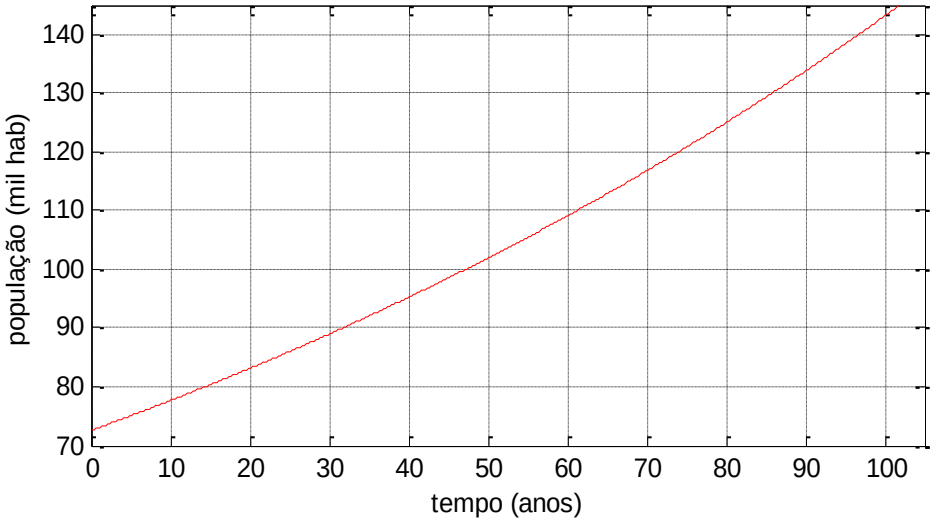


Fonte: Elaborado pelos autores,2017.

A partir desses parâmetros buscou-se resolver o seguinte problema: “Considerando que a área geográfica do município de Santa Rosa – RS permaneça constante e que sua população mantenha o mesmo ritmo de crescimento desde 2000, quanto tempo o município levará para duplicar a população residente em 2016?”.

Aplicando-se o modelo matemático para a população inicial de 75504 hab. (população em 2016), e definindo a dimensão máxima do eixo y (população) para o dobro da população inicial, obteve-se o gráfico representado na figura 4.

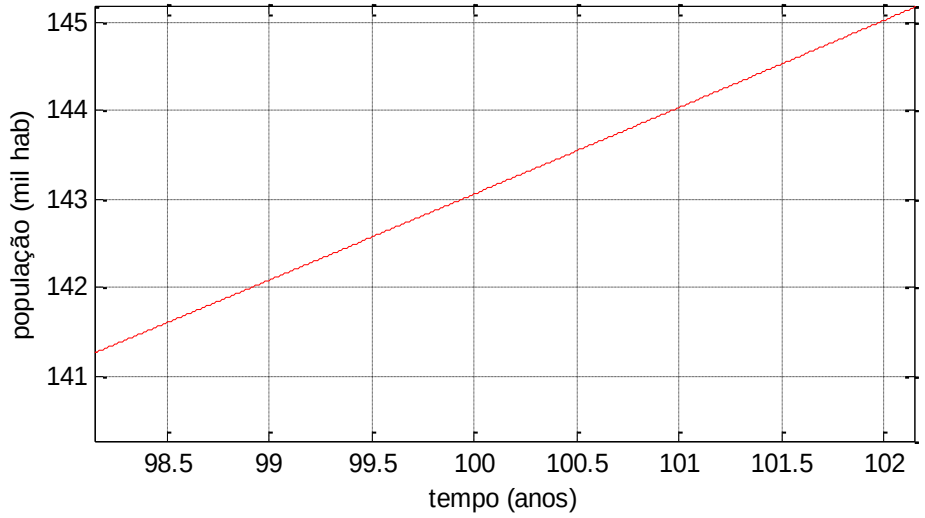
Figura 4 – Crescimento populacional do município de Santa Rosa dado Pi=72504 hab. e k=0.0067957



Fonte: Elaborado pelos autores,2017.

Observando o gráfico é possível indicar que a população de Santa Rosa duplicará em aproximadamente 100 anos, porém se manusear a ferramenta de zoom do gráfico gerado pelo software Matlab, verifica-se que o período estimado para que a população do município dobre é de 102 anos (Figura 5).

Figura 5 – Ampliação do gráfico do crescimento populacional do município de Santa Rosa dado P_i=72504 hab. e k=0.0067957



Fonte: Elaborado pelos autores,2017.

Porém, como:

> Os modelos computacionais são “recortes” da realidade, ou seja, são implementações computacionais de modelos específicos, e, como tais, desprezam diversos aspectos do sistema real, a fim de focar a atenção em certos aspectos particulares da natureza, o que facilita a compreensão do fenômeno físico (HEIDEMANN, 2012, p. 972).

Admite-se que os resultados obtidos nas simulações computacionais apresentam uma margem de erro, porém essa fora desconsiderada no trabalho em questão.

4 CONCLUSÕES

A partir da pesquisa bibliográfica e das simulações computacionais realizadas pôde-se perceber que o Modelo de Malthus utiliza a variação média do crescimento da população em um determinado período de tempo e, toma essa variação como constante.

Verificou-se com isso que o modelo é válido para fazer algumas previsões, porém sua margem de erro ainda é alta, pois o mesmo considera que a população de indivíduos reprodutores se mantém constante durante o crescimento, que as taxas de natalidade e de mortalidade permaneçam estáveis e, ainda que não ocorre migrações dentro do espaço geográfico analisado, o que nem sempre se verifica na realidade.

Contudo, o desenvolvimento desse trabalho auxiliou na consolidação do conhecimento adquirido sobre as etapas necessárias para se modelar matematicamente um problema real. Possibilitou também a compreensão de que nenhum modelo matemático pode ser considerado como definitivo pois sempre há a possibilidade de aprimorar o mesmo considerando mais ou menos parâmetros dependendo do foco do problema, como é o caso do modelo de crescimento populacional.

Cabe ressaltar que a compreensão das etapas da modelagem matemática como método de pesquisa contribuiu para uma melhor assimilação dessa ferramenta como uma metodologia de ensino. Constatou-se ainda, que o uso de tecnologias, como softwares matemáticos enriquecem o processo de ensino e de aprendizagem por meio da modelagem matemática, uma vez que facilitam a compreensão dos modelos e sua manipulação por meio de simulações computacionais.

Visto que a prática possibilita melhor entendimento da teoria, é possível afirmar que o desenvolvimento desse trabalho proporcionou maior segurança/autoconfiança para planejar e implementar aulas através da metodologia de Modelagem Matemática.

5 REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BRASIL. **Censos Demográficos**: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística–IBGE. Disponível em <http://www.ibge.gov.br/home/mapa_site/mapa_site.php#populacao> Acesso em: maio de 2017.

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação.** Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2005.

Heidemann, L. A. **Ciclos de modelagem:** uma proposta para Integrar atividades baseadas em simulações computacionais e atividades experimentais no ensino de física. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 29, n. especial 2, p. 965-1007, out. 2012.