



APLICAÇÃO DO CÁLCULO DA QUEDA DE TENSÃO ELÉTRICA EM UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Carlos Eduardo Andrades¹, Antonio Carlos Valdiero²

¹UNIJUÍ/Mestrado em Modelagem Matemática/Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, carloseduardoandrades@gmail.com

² UNIJUÍ/Mestrado em Modelagem Matemática/Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, valdiero@unijui.edu.br

RESUMO:

A queda de tensão em um circuito elétrico é a perda de tensão causada pela longa distância da transmissão de energia elétrica. A partir da metodologia de Modelagem Matemática foi possível desenvolver um modelo matemático capaz de calcular a quantidade de tensão elétrica desperdiçada em função do espaço entre a fonte de entrada ou da fonte geradora até uma carga. O modelo matemático foi criado através da aplicação da taxa de variação da tensão em função da distância nas propriedades de uma Equação Diferencial Ordinária Linear Homogênea de 1ª ordem. O objetivo desse trabalho é desenvolver a pesquisa e acrescentar a comunidade científica mais uma aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias. Considerando que a queda de tensão é um problema que pode danificar equipamentos elétricos esse estudo contempla tanto para o ensino e a contextualização da matemática quanto para cálculos subjetivos de engenharia elétrica.

Palavras Chaves: Modelagem Matemática; Queda de Tensão; Equações Diferenciais Ordinárias.

1 INTRODUÇÃO

Em um circuito elétrico, a queda de tensão elétrica é uma irregularidade gerada pela grande distância entre a entrada/geração de potencial até a alimentação de uma carga. Quanto maior o intervalo percorrido por um cabo de energia, maior será a perda de tensão ao longo dele.

Em um circuito eletrônico, a queda de tensão ocorre em função da disposição de componentes eletrônicos organizados em série ou em paralelo no sistema que afetam propositalmente a entrada de tensão em outros componentes.

Já em um circuito elétrico a queda de tensão é um fator de grande preocupação visto que uma tensão baixa influencia no rendimento das cargas bem como pode levar a avarias os equipamentos e sobreaquecer o sistema de transmissão.

Para a ABNT NBR 5410 (2004), que estabelece as normas para instalações elétricas de baixa tensão, a queda de tensão nunca deve ultrapassar 4% da tensão nominal da entrada de energia quando ela não coincidir com a tensão do equipamento. Por outro lado, a norma estabelece uma tabela com os limites de queda para equipamentos que operam com tensão igual à da rede, que são:

- a) 7%, calculados a partir dos terminais secundários do transformador MT/BT, no caso de transformador de propriedade da(s) unidade(s) consumidora(s);
- b) 7%, calculados a partir dos terminais secundários do transformador MT/BT da empresa distribuidora de eletricidade, quando o ponto de entrada for aí localizado;
- c) 5%, calculados a partir do ponto de entrega, nos demais casos de ponto de entrega com fornecimento em tensão secundária de distribuição;
- d) 7%, calculados a partir dos terminais de saída do gerador, no caso de grupo de gerador próprio (ABNT, 2004, p.115).

Também, a norma complementa que nos casos a, b e d quando a alimentação da instalação possuir um comprimento maior que 100 metros, as quedas de tensão podem atingir a quantidade de 0,005% por metro.

Nas literaturas, já existem fórmulas matemáticas prontas para os cálculos da queda tensão. Essas fórmulas são mais precisas pelo fato de considerar uma grande quantidade de fatores que afetam a perda de tensão tais como o diâmetro do cabo utilizado na instalação, o material utilizado para a fabricação do cabo (cobre, alumínio, prata, ouro), a corrente elétrica de trabalho exercida sobre o cabo, entre outros, que nesse estudo serão chamados de não-linearidades.

Para a criação do modelo matemático essas não-linearidades foram desconsideradas com a finalidade de adequar-se a uma Equação Diferencial Ordinária Linear.

O propósito desse estudo é apresentar uma aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias Linear Homogênea de 1ª ordem utilizando a metodologia de Modelagem Matemática e com isso desenvolver a pesquisa, ensino e contextualização nas áreas de matemática e engenharia.

Na seção 2 tem-se a metodologia utilizada, na seção 3 estão os resultados que incluem a formulação matemática aplicada à queda de tensão elétrica e a sua simulação, e na seção 4 apresentam-se as conclusões do trabalho.

2 METODOLOGIA

Em um processo de construção de conhecimentos a metodologia é a ferramenta essencial para se atingir os melhores resultados com ênfase no processo.

A Modelagem Matemática é um procedimento que envolve etapas tais como a formulação do problema, a elaboração de um modelo matemático, a resolução do problema a partir de conceitos matemáticos, a interpretação do problema e então a validação com a realidade, ou seja, é a obtenção de um modelo onde se tenta descrever matematicamente um fenômeno da nossa realidade para tentar compreendê-lo e estudá-lo, criando hipóteses e reflexões sobre esse fenômeno (BIEMBENGUT E HEIN 2013).

Para Bassanezi (2004),

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de

transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2004, p.24).

Além dessa metodologia ter como essência o processo e a criação de modelos matemáticos, ela desenvolve a pesquisa, visto que se faz necessário explorar informações as quais satisfazem a elaboração matemática a ser modelada.

Desenvolver um estudo seguindo as etapas da metodologia de Modelagem Matemática fortalece o instinto investigador do pesquisador. Pois o pesquisador está motivado a formular artifícios para solucionar um problema/objetivo criado por ele mesmo.

A harmonia da metodologia de Modelagem Matemática com as Equações Diferenciais Ordinárias repercute em um trabalho direcionado a técnicas matemáticas que possui resultados aplicados em diversas áreas. Esse estudo será conduzido mais especificamente para a contextualização da matemática na área elétrica.

3 RESULTADOS E ANÁLISE

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Na literatura já existem cálculos específicos para encontrar a queda de tensão. Conforme Moreno (2014), a queda de tensão (ΔU) em um trecho de uma instalação é dada por:

$$\Delta U = (V/A.km).I_B \times \ell \quad (1)$$

Onde:

- ΔU é a queda de tensão em volts.
- $(V/A.km)$ é um valor fornecido pelos fabricantes de cabos que corresponde aproximadamente à impedância do cabo.
- I_B é a corrente do projeto (em ampères), incluindo as harmônicas.
- ℓ é o comprimento do circuito (em km).

Nesse modelo encontrado, a razão $(V/A.km)$ que se encontra na tabela de valores fornecida pelos fabricantes de cabos considera várias características tais como o fator de potência, a impedância, a seção do cabo (mm^2), a distância entre os cabos na instalação, circuito monofásico ou trifásico, a temperatura e o local (eletroduto, eletrocalha, entre outros) onde estão instalados os cabos.

Outra expressão encontrada corresponde a:

$$\Delta V = \sqrt{3} \cdot I \cdot \ell (R_{cat} \cdot \cos\phi + X_L \cdot \sin\phi) \quad (2)$$

Onde:

- ΔV = queda de tensão (V)
- I = corrente a ser transportada (A)
- R_{cat} = resistência em corrente alternada à temperatura de operação $t^\circ C$ (Ω/km)

- φ = ângulo de fase
- $\cos\varphi$ = fator de potência da carga
- X_L = reatância indutiva na linha (Ω/km)
- l = comprimento do circuito, do ponto de alimentação até a carga (km)

Comparando (1) com (2) verifica-se que a primeira expressão trabalha com dados prontos que deverão ser encontrados na tabela, já a segunda expressão é mais detalhada a qual deixa o solucionador obter através de medições mais precisas.

Logo, percebe-se que o comprimento da instalação (l) é comum em ambas expressões. Também, pode-se dizer que é o principal fator que interfere na queda de tensão, sendo a distância da instalação diretamente proporcional a quantidade de volts desperdiçado.

ELABORAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Para a formulação do modelo matemático, elimina-se as não-linearidades do sistema para se adequar a uma Equação Diferencial Ordinária Linear Homogênea de 1ª Ordem.

Logo, as duas grandezas escolhidas para dimensionar a queda de tensão foram:

A tensão de queda total do circuito elétrico, denominada por:

$$\Delta V = V - V_0 \quad (1)$$

Onde:

- ΔV é a queda de tensão (em volts) no circuito
- V é a tensão final medida na carga
- V_0 é a tensão inicial medida na entrada do circuito ou na geração de potencial

E a distância total do circuito elétrico, denominada por:

$$\Delta M = M - M_0 \quad (2)$$

Onde:

- ΔM é a distância (em metros) do circuito
- M é a distância final que corresponde desde a entrada do circuito até a carga
- M_0 é a distância inicial que corresponde ao ponto de partida do circuito

Referente à resolução do problema matemático, para encontrar a quantidade de volts perdida a cada metro, utiliza-se a expressão (1) na razão da expressão (2). Então:

$$\frac{\Delta V}{\Delta M} = \frac{V - V_0}{M - M_0}$$

Podemos afirmar que:

$$\frac{\Delta V}{\Delta M} = \frac{dV}{dM}$$

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Adicionando a derivada acima em uma Equação Diferencial Ordinária Linear de 1ª Ordem obtemos:

$$\frac{dV}{dM} + k \cdot (V - V_0) = 0$$

Onde k é uma constante de queda. Logo aplicamos o método de solução de Variáveis Separáveis:

$$\frac{dV}{dM} = -k \cdot (V - V_0)$$

$$\frac{dV}{V - V_0} = -k \cdot dM$$

$$\int \frac{dV}{V - V_0} = - \int k \cdot dM$$

$$\ln(V - V_0) = -k \cdot M$$

$$V - V_0 = C \cdot e^{-k \cdot M}$$

Pelo fato de não existir queda de tensão quando a distância é igual a zero, temos:

$$V(0) = V_0$$

$$V = V_0 \cdot e^{-k \cdot M}$$

INTERPRETAÇÃO E VERIFICAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA

Com referência à interpretação e validação do modelo matemático deduzido:

$$V = V_0 \cdot e^{-k \cdot M}$$

Onde:

- V é a tensão na carga
- V_0 é a tensão na entrada do circuito
- k é uma constante de queda
- M é a quantidade de metros do circuito

A seguir apresentam-se algumas aplicações da solução do modelo em estudos de caso:

Verificação 1: Em um circuito elétrico de tensão nominal de 380v, existe dois motores, o primeiro chega a tensão de 367v e o segundo, localizado a 200 metros de distância do início do circuito, chega a tensão de 361v. Quantos metros o primeiro motor está do início do circuito?

Resolução:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dM} = -k \cdot (V) \\ V(200) = 361 \end{cases}$$

$$V = V_0 \cdot e^{-k \cdot M}$$

$$361 = 380 \cdot e^{-k \cdot 200}$$

$$K = 0,000256$$

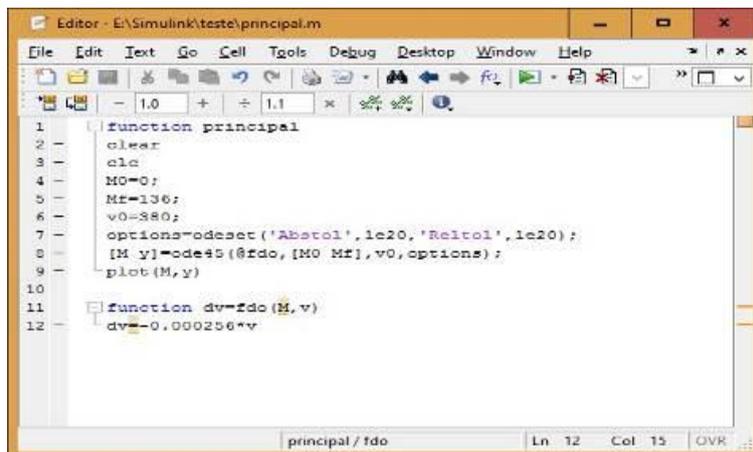
$$367 = 380 \cdot e^{-0,000256 \cdot M}$$

$$\frac{367}{380} = e^{-0,000256 \cdot M}$$

$$M \cong 136 \text{ metros}$$

As Figuras 1 e 2 a seguir mostram a construção da EDO Linear Homogênea no programa computacional MATLAB e no SIMULINK respectivamente, e a Figura 3 mostra a representação gráfica gerada a partir da construção da EDO, usando os dados Verificação 1.

Figura 1 Dados iniciais da Verificação 1



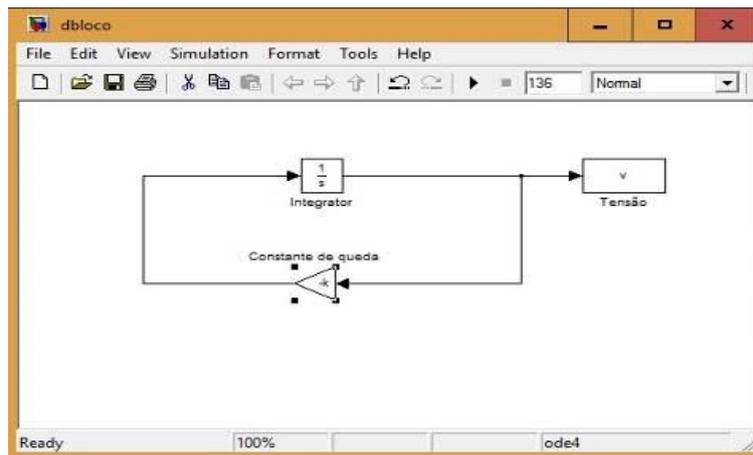
```

1 function principal
2 clear
3 cla
4 M0=0;
5 Mf=136;
6 v0=380;
7 options=odeset('Abstol',1e20,'Reltol',1e20);
8 [M y]=ode45(@fdo,[M0 Mf],v0,options);
9 plot(M,y)
10
11 function dv=fdo(M,v)
12 dv=-0.000256*v

```

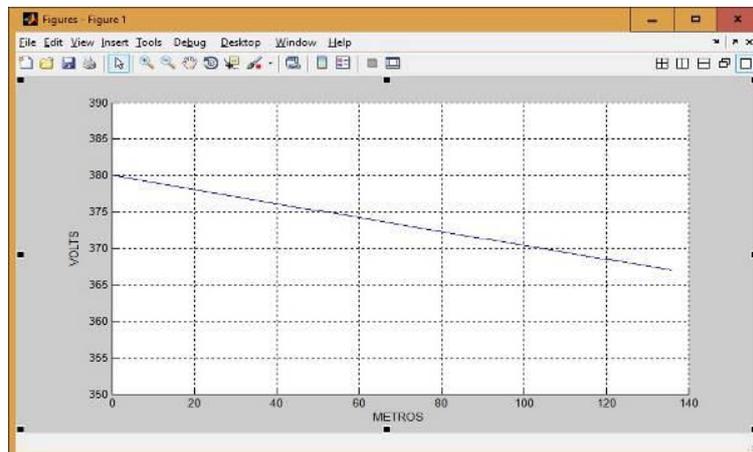
Fonte: O Autor (2017).

Figura 2 Diagrama de blocos da Verificação 1



Fonte: O Autor (2017).

Figura 3 Geração do gráfico da Verificação 1



Fonte: O Autor (2017).

Verificação 2: A tensão ideal de um circuito é 220v, porém no início desse circuito está chegando 210v. Sabe-se que em uma tomada monofásica localizada a 350 metros de distância existe uma queda tensão. Calcule quantos volts é necessário aumentar na entrada de energia para compensar a queda de tensão nessa tomada. (Use 0,000347 para a constante de queda.)

Resolução:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dM} = -k \cdot (V) \\ V(350) = ? \\ k = 0,000347 \end{cases}$$

$$V = V_0 \cdot e^{-k \cdot M}$$

$$V = 210 \cdot e^{-0,000347 \cdot 350}$$

$$V \cong 185 \text{ volts}$$

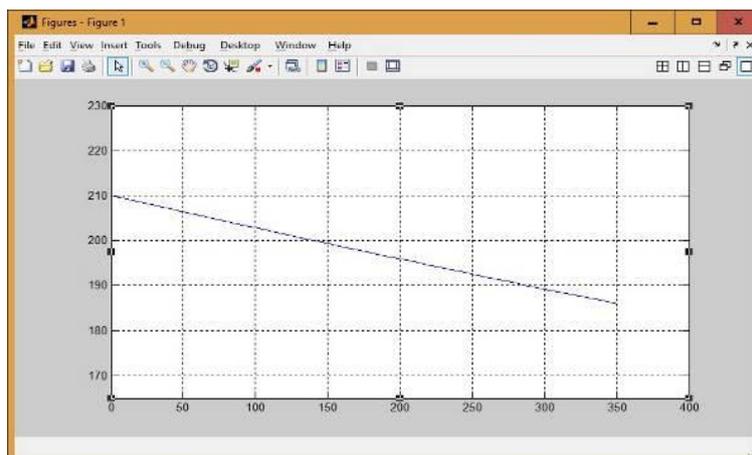
$$\Delta V = V - V_0$$

$$\Delta V = 220 - 185$$

$$\Delta V = 35 \text{ volts}$$

Para compensar a queda de tensão e evitar danos ao aparelho ligado nessa tomada é necessário aumentar a tensão de 220v para 255v.

Figura 4 Geração do gráfico da Verificação 2



Fonte: O Autor (2017).

Verifica-se que o modelo matemático criado atende ao decréscimo causado pela perda de tensão ao longo da distância do circuito elétrico.

Como explanado anteriormente, esses cálculos são subjetivos por não conter todas as não-linearidades do sistema que são o diâmetro do cabo elétrico, o material de fabricação do cabo, a corrente elétrica de trabalho, ângulo de fase, reatância indutiva da linha, entre outras.

Portanto, o modelo é direcionado a contextualização e ensino das Equações Diferenciais Ordinárias Linear Homogênea de 1ª ordem nas áreas da matemática e engenharia elétrica e cálculos aproximados de queda de tensão.

4 CONCLUSÕES

Ao final desse estudo percebe-se mais uma aplicação das Equação Diferencial Ordinária Linear Homogênea de 1ª ordem na área de engenharia elétrica.

Pode-se dizer que a aplicação do cálculo da queda de tensão nas propriedades de uma EDO Linear Homogênea de 1ª ordem é pioneira através desse estudo, pois não foi encontrada em bibliografias nem da área de EDO e em acervos que envolvessem o assunto de queda de tensão em sistemas monofásicos e trifásicos.

O modelo encontrado tornasse bastante útil visto a aplicabilidade em cálculos aproximados de queda de tensão e dos prejuízos causados por essa irregularidade em um sistema elétrico.

Igualmente, este estudo proporciona benefícios para o ensino e aprendizagem de EDO em cursos de Matemática e Engenharia.

Vale lembrar que foram retiradas as não-linearidades do sistema de perda de tensão - seção do cabo, material de fabricação do cabo, influência da harmônica, temperatura que o cabo está exposto, entre outros - para se adequar em uma EDO Linear Homogênea de 1ª Ordem.

Para o aperfeiçoamento do trabalho verifica-se a necessidade de comparar esse estudo com cálculos realizados na prática, no sentido de verificar a diferença do modelo validado em plataforma computacional com a realidade.

Também, compreende-se para o aperfeiçoamento do estudo, desenvolver um novo modelo matemático considerando as não-linearidades presentes no sistema elétrico.

Outro aspecto relevante é a contextualização do ensino de matemática na área da engenharia elétrica, a qual pode favorecer a aprendizagem de qualidade e a motivação dos estudantes de engenharia no ciclo básico (dois primeiros anos).

5 REFERÊNCIAS

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR – NORMA BRASILEIRA 5410: Instalações elétricas de baixa tensão**. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

MORENO, Hilton. **Cabos Elétricos de Baixa Tensão**. São Paulo: Cobrecom Fios e Cabos Elétricos, 2014.