O CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE ERECHIM REPRESENTADO ATRAVÉS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Nelize Fracaro[1], Dionatan Breskovit de Matos[2], Eduardo Post[3], Manuel Martín Pérez Reimbold[4]

[1]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, nelize_fracaro@hotmail.com

[2]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, breskovit.mat@gmail.com

[3]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, edupostmat@gmail.com

[4]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, manolo@unijui.edu.br

RESUMO: O presente trabalho busca, através da aplicação de uma modelagem adequada mostrar a validação do modelo de Malthus para o crescimento populacional, no município de Erechim, em específico. A escolha do tema aqui abordado deu-se através da análise dos conhecimentos científicos sobre a Modelagem Matemática contextualizados na realidade de um município. O Modelo Matemático utilizado neste trabalho será o Modelo de Malthus, pois a prática foi desenvolvida com o intuito de poder comparar e analisar os resultados obtidos pelo modelo com os dados estatísticos do IBGE, no período de 2000 a 2015. Procura-se também, compreender com maior profundidade as contribuições da matemática para a sociedade.

Palavras Chaves: População; IBGE; Modelo de Malthus.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho busca analisar o crescimento populacional do município de Erechim-RS, através da Modelagem Matemática. O ferramental matemático utilizado será as equações diferenciais, em particular as equações de variáveis separáveis e o modelo de Malthus.

Procura-se, neste trabalho mostrar um pouco da importância da Modelagem Matemática, visto que a mesma está diretamente ligada aos fenômenos naturais, como por exemplo, o crescimento populacional. Este tema possui grande importância para a sociedade, pois é muito utilizado pelos governantes, que utilizam as taxas de crescimento ou decrescimento populacional para tomar decisões referentes ao atendimento das populações, como a aplicação dos recursos financeiros públicos. Corroborando com isso, (BIEMBENGUT 1999, p.136) afirma que:

> [...] à criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. A própria noção de modelo está presente em quase todas as áreas; arte, moda, arquitetura, história, economia, geografia, literatura, matemática. Alias a história da ciência é testemunha disso. [...]

Assim sendo, percebe-se a grande importância da Modelagem Matemática e também sua colaboração para a sociedade. Neste trabalho, os resultados encontrados pela aplicação do modelo e dos dados obtidos no IBGE, serão mostrados e comparados através de tabelas e gráficos.

Após uma ampla pesquisa bibliográfica e muitos estudos realizados sobre Modelagem Matemática, este trabalho tem por objetivo aprofundar os conhecimentos sobre modelagem matemática, buscando mostrar como se deu o crescimento populacional do município de Erechim nos últimos anos, através do Modelo de Malthus.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesse trabalho utilizou-se um tipo de modelo dado pelas equações que contém as derivadas ou diferenciais de uma variável dependente em relação a uma variável independente, que são as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Com o objetivo da compreensão deste tipo de modelo, será apresentado um breve elenco de definições e conceitos que compõem a teoria das equações diferenciais e a teoria de Malthus**.**

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a “uma ou mais” variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial (ED) e são classificadas de acordo com o “tipo”, a “ordem” e a “linearidade”. (ZILL, 2001, p.2).

As equações diferenciais podem ser classificadas:

- *Quanto ao tipo:* Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO), por outro lado uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP).
- *Quanto à ordem:* A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação diferencial.
- *Quanto à linearidade*: Uma equação diferencial é chamada de “linear” quando pode ser escrita na forma padrão tendo duas propriedades caracterizadas, onde na primeira, a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1 , e a segunda, que cada coeficiente depende apenas da variável independente x . Uma equação que não é linear é chamada de “não linear” e pode ser escrita na forma implícita.

As equações diferenciais de primeira ordem são definidas do seguinte modo:

Equação Diferencial de Primeira Ordem - Variáveis Separáveis

Para desenvolver o cálculo de uma Equação Diferencial de Primeira Ordem pelo método de variáveis separáveis, é utilizada a integração por partes, frações parciais ou possivelmente uma substituição. Neste caso, a equação geral de primeira ordem assume a forma $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x)}{B(x)}$.

Equação diferencial de primeira ordem linear

É a equação cuja função f(x, y) conhecida, de duas variáveis, depende linearmente da variável dependente y , então a equação pode ser escrita na forma $\frac{dy}{dx} + p(x) = q(x)$, onde p(x) e q(x) são funções de variável independente x e é chamada de equação diferencial de primeira ordem.

Uma maneira comum de modelar uma população é por meio de uma função derivável P que aumenta a uma taxa proporcional ao tamanho da população. Um modelo desse tipo de crescimento populacional é o modelo Malthusiano, advindo de Thomas Malthus (1776-1834).

O Modelo de Malthus propõe um crescimento de vida otimizado, sem guerra, fome, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. Define-se em uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser classificada como uma EDO de primeira ordem de Variáveis Separáveis e também como Linear.

A ideia de Malthus é a de que a taxa na qual uma população cresce é proporcional ao seu tamanho, e isso na linguagem das equações diferenciais quer dizer:

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

Em que k é a diferença entre a taxa de natalidade e a de mortalidade. T representa o tempo decorrido desde o início do experimento, e P representa o tamanho da população no tempo T, isto é, P é variável dependente e T é a independente. Então:

Se $k > 0$, a população apresenta-se crescente;

Se $k < 0$ a população decresce;

Se $k = 0$ a população permanecerá constante, pois a taxa de natalidade será igual a taxa de mortalidade.

Vale ressaltar que este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento da população estudada está sujeita apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxas de migração, e ainda se pudermos considerar a diferença entre as taxas de natalidade e de mortalidade que é um valor constante k, assim a seguinte formulação será dada por:

$$P(t) = Po.e^{kt}$$

Na solução apresentada acima, usamos Po uma condição inicial, para chegarmos na solução específica, como um valor conhecido do início do experimento, no instante $t = 0$, assim nossa condição inicial é $P(t = 0) = Po$. Colocamos isso junto à equação diferencial original e deste modo obtemos um problema de valor inicial para o modelo de Malthus. A equação diferencial pode ser resolvida pelo Método de Separação de Variáveis. Desta forma:

$\frac{dp}{dt} = kp$, pode ser escrito como $\frac{dp}{p} = kdt$,

A condição inicial é substituída neste resultado na integração da equação diferencial.

$$\int_{P_0}^{P(T)} \frac{dP}{P} = k\int_0^T dT$$

Assim, obtemos: $\frac{ln\, P(T)}{Po} = kT$ o que implica em $P(t) = Po.e^{kt}$, onde k representa uma constante de proporcionalidade da população, a qual assumiu inicialmente ser dependente apenas de taxas constantes de natalidade e mortalidade.

O modelo de Malthus é um exemplo de modelo com uma variável e um parâmetro. Uma variável é a quantidade observada, que geralmente mudam no tempo. Os parâmetros são quantidades conhecidas antes da construção do modelo, e geralmente são constantes, mas também podem mudar no tempo. Neste modelo a variável é a população e o parâmetro é a taxa de crescimento populacional.

Assim, percebe-se que o modelo Malthusiano é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser classificada como um dos dois tipos de equações definidas acima, ou seja, como uma EDO de primeira ordem de Variáveis Separáveis e também como Linear. Neste trabalho apresenta-se a solução deste modelo pelo método de variáveis separáveis e o utilizamos para a comparação e verificação dos dados obtidos no IBGE, referentes à população de Erechim no período de 2000 a 2015.

3 METODOLOGIA/ DETALHAMENTO DAS ATIVIDADES

Para modelar matematicamente o comportamento populacional do município de Erechim, utilizou-se um tipo de modelo dado pelas equações que contém as derivadas ou diferenciais de uma variável dependente em relação a uma variável independente, que são as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Tal modelo, consiste no modelo de dinâmica populacional de Malthus. Malthus foi figura central em estudos na história da população.

A fim de verificar se esse modelo é válido e adequado para o estudo populacional do município de Erechim, é necessário possuir alguns dados populacionais do mesmo. Estes foram retirados dos registros estatísticos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), conforme a tabela 1.

Tabela1: População de Erechim - RS, segundo dados do IBGE

Anos	**Dados IBGE (População total)**	**Taxas de crescimento % a.a**
2000	90347	-
2007	92945	0,41
2010	96087	1,13
2015	102345	1,3

Fonte: IBGE

As taxas de crescimento serão os valores que o parâmetro k (diferença entre a taxa de natalidade e a de mortalidade) do modelo irá assumir. Já as populações registradas serão utilizadas para validar o modelo malthusiano. Essa validação dá-se pela comparação desses dados do IBGE com os obtidos através do referido modelo.

4 RESULTADOS E ANÁLISE

O Modelo de Crescimento Exponencial, isto é, a taxa de variação da população em relação ao tempo, aqui denotada por $\frac{dp}{dt}$ é proporcional à população atual, comparando e verificando os dados obtidos no IBGE, referentes à população do município de Erechim - RS no período de 2000 a 2015.

Então, se $P = P(t)$ diz respeito à população num determinado tempo t, pode-se obter a seguinte representação $\frac{dp}{dt} = kp$, em que a taxa k é a constante de proporcionalidade que relaciona a Natalidade (n) e a Mortalidade (m) e ainda é definida por $k = n - m$. Neste caso, existe a possiblidade de $k > 0$, permitindo o crescimento populacional, ou a constante $k < 0$, apresentando o decrescimento da população.

Assim, temos o seguinte procedimento de cálculo, considerando a equação dada e a partir desta, aplicar o Modelo Malthusiano pela separação de variáveis:

$$\frac{dp}{dt} = kp \qquad (1)$$

$$\int \frac{dp}{p} - \int kdt = C \qquad (2)$$

$$\mathrm{P}(t) = e^{kt+C} \qquad (3)$$

$$P(t) = Poe^{kt} \qquad (4)$$

A partir da equação (4) encontrada, é possível calcular a taxa de desenvolvimento populacional do município de Erechim-RS, (Gráfico 2). No entanto, isto é possível apenas se k representa uma constante de proporcionalidade da população a qual, num primeiro momento é dependente apenas de taxas constantes de natalidade e mortalidade.

Abaixo, são apresentados os dados do IBGE e com os resultados obtidos com a solução do modelo de crescimento populacional através do método Malthusiano.

A seguir, apresenta-se os resultados obtidos com a solução do modelo de crescimento populacional através do método de variáveis separáveis:

Tomando os dados da tabela 1 e a solução do modelo temos:

De 2000 a 2007

$$P(t) = Po.e^{kt}$$
$$P(7) = 90347.e^{7.0,41/100}$$
$$P(7) \cong 92977\ habitantes$$

De 2007 a 2010

$$P(t) = Po.e^{kt}$$
$$P(3) = 92945.e^{3.1,13/100}$$
$$P(3) \cong 96149\ habitantes$$

De 2010 a 2015

$$P(t) = Po.e^{kt}$$
$$P(5) = 96087.e^{5.1,3/100}$$
$$P(5) \cong 102540\ habitantes$$

A tabela 2 fornece os censos demográficos do IBGE e as taxas de crescimento calculadas de período em período segundo a equação do Modelo Malthusiano.

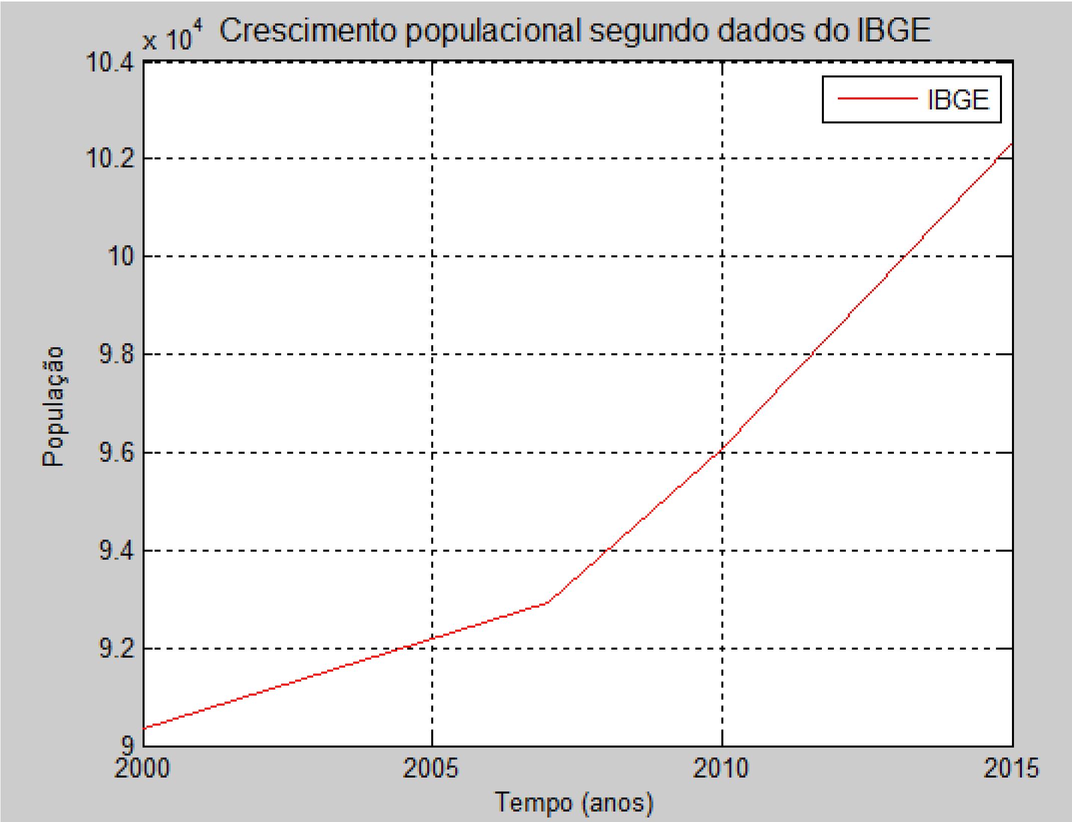
Tabela 2: População de Erechim-RS, segundo dados obtidos do IBGE e os dados obtidos pelo modelo

Anos	**População total (Modelo de Malthus)**	**Taxas de crescimento % a.a**
2000	90347	-
2007	92977	0,41
2010	96149	1,12
2015	102540	1,3

Fonte: Próprios autores

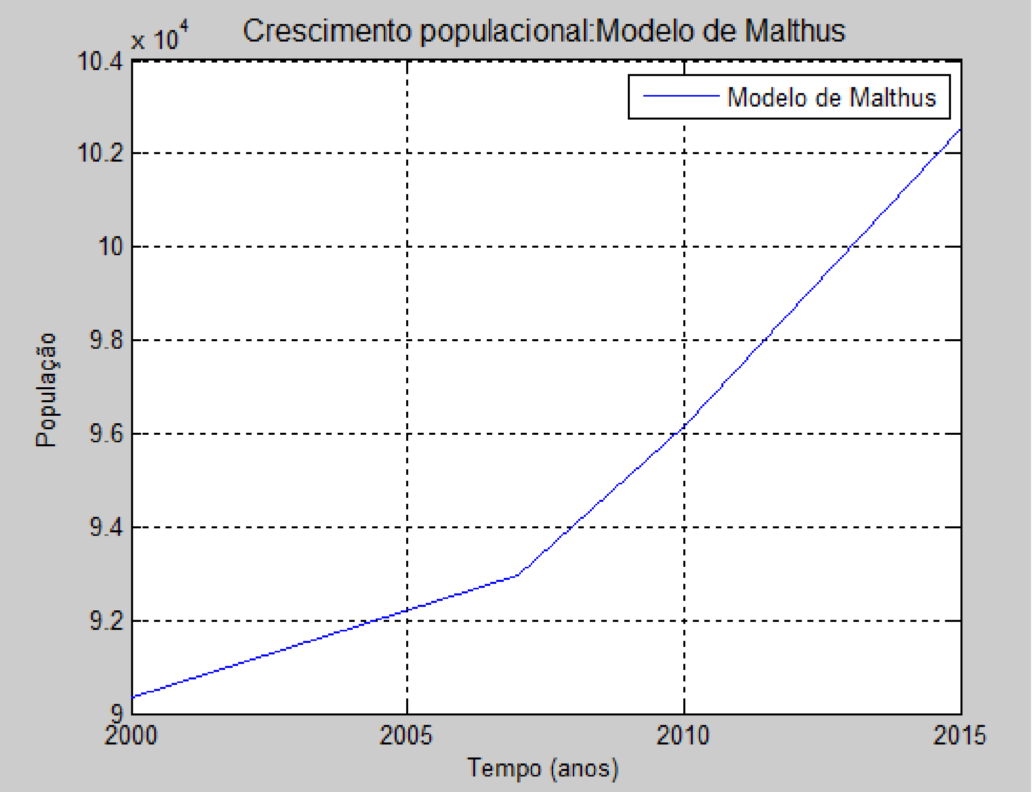
Assim, percebe-se que os dados calculados através do Modelo de Malthus se aproximam bastante dos dados reais obtidos pelo IBGE. Abaixo seguem os gráficos, feitos no software MATLAB, para uma melhor visualização.

Gráfico 1: Dados do IBGE



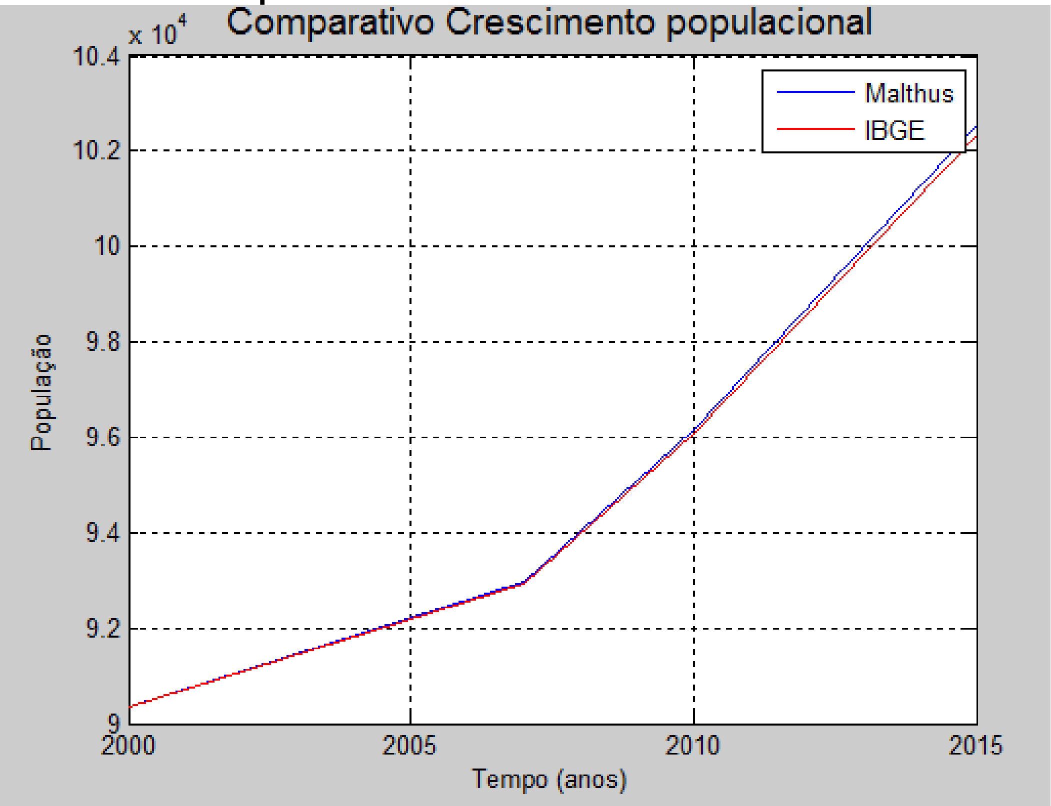
Fonte: Próprios autores

Gráfico 2: Dados obtidos através do Modelo de Malthus



Fonte: Próprios autores

Gráfico 3: Comparativo entre os dados do IBGE e o Modelo de Malthus



Fonte: Próprios autores

Sendo assim, nota-se que os resultados obtidos com a solução do modelo de crescimento populacional, através do método Malthusiano, aproximam-se dos dados estatísticos apresentados pelo IBGE, então, pode-se considerar válido o trabalho desenvolvido através da Modelagem Matemática.

5 CONCLUSÕES

Com este trabalho, percebe-se que a adoção de modelos matemáticos, sendo na forma de apresentação, ou no processo de criação é muito importante para as pessoas que estudam nos variados níveis da matemática, para que assim percebam a importância da matemática, suas linguagens, relações e símbolos, para a compreensão dos mais diversos fenômenos do nosso cotidiano.

Neste trabalho, a validação deste modelo matemático se dá pelo motivo da aproximação do resultado encontrado com as informações obtidas durante a coleta de dados. Com a solução do modelo, e a mesma aplicada posteriormente sobre as taxas de crescimento da população do município de Erechim, observou-se que os resultados encontrados são muito próximos dos dados fornecidos pelo IBGE. Deste modo temos a validação do modelo apresentado pela teoria de Malthus, e assim podemos visualizar que a matemática está diretamente ligada à solução dos problemas modelados a partir dos fenômenos. Futuramente, pretende-se realizar mais pesquisas relacionadas a modelagem matemática e a teoria de Malthus.

6 REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R.C; FERREIRA, W.C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Editora Harba, 1988.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática e implicações no ensino aprendizagem de matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 1999.

IBGE. **População de Erechim/RS**. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/>. Acesso em 02 abr 2016.

ZILL, D.G. **Equações Diferenciais**. Volume 1. Dennis G. Zill. São Paulo, mAkron Books, 2001.

SIMONATO, A.L; GALLO, K.C. **Aplicação de Modelagem no Crescimento populacional Brasileiro**. Disponível em: <http://www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario/9/19042010084307.pdf>. Acesso em 05 abr 2016