MODELAGEM MATEMÁTICA DA CONSERVAÇÃO DE TEMPERATURAS DE LÍQUIDOS EM UMA GARRAFA TÉRMICA COM AMPOLA DE VIDRO: UMA APLICAÇÃO DA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Dionatan Breskovit de Matos[1], Eduardo Post[2], Nelize Fracaro[3], Manuel Martín Pérez Reimbold[4]

[1]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, breskovit.mat@gmail.com
[2]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, edupostmat@gmail.com
[3]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, nelize_fracaro@hotmail.com
[4]UNIJUÍ/DECEEng/Mestrado em Modelagem Matemática – Campus Ijuí, manolo@unijui.edu.br

RESUMO: O Cálculo Diferencial e Integral, especificamente as Equações Diferenciais Ordinárias, possuem inúmeras aplicações. Dentre elas, optou-se por estudar e investigar um problema de temperatura. O presente artigo tem como objetivo verificar a capacidade de uma garrafa térmica de ampola de vidro em manter constante a temperatura de líquidos. Este problema é uma aplicação da lei de resfriamento/aquecimento de Newton e tem em vista determinar quanto tempo um líquido, quente e/ou frio, mantém-se a uma temperatura ainda considerada ideal para o consumo. Para tanto, realizou-se a aquisição de dados experimentais a serem utilizados na validação do modelo matemático. Alguns parâmetros para o modelo empregado foram determinados experimentalmente e outros analiticamente. O modelo foi programado utilizando-se o *software* MatLab/Simulink e essa simulação foi comparada aos dados experimentais, visando confirmar o modelo matemático desenvolvido por Newton. A garrafa térmica mostrou-se eficaz na conservação de temperaturas de líquidos.

Palavras Chaves: Equações Diferenciais Ordinárias; Problema de temperatura; Modelo matemático.

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral caracteriza-se como um importante instrumento matemático, e que, de acordo com os apontamentos de Howard Anton, “tem um enorme impacto em nossa vida diária, porém, frequentemente não é notado” (2000, p. 2). Alguns exemplos que elucidam esta afirmação são: a utilização na compactação de impressões digitais do FBI, na música, na previsão do tempo, controle do comportamento caótico do coração humano, entre muitos outros. (ANTON, 2000).

As aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, especificamente das equações diferenciais, abrem infinitas possibilidades de estudo e investigação. As equações diferenciais de primeira ordem constituem um dos instrumentos chave para o desenvolvimento da Matemática moderna. Estas possuem uma ampla aplicabilidade e são essenciais na análise e resolução de diversos problemas.

Problemas que envolvem variações de temperatura, por exemplo, podem ser solucionados empregando a lei de resfriamento de Newton na análise de dados experimentais (STEWART, 2012). Tal técnica possibilita determinar, com pequenas incertezas, a solução de situações-problema desde as simples até as mais complexas.

Neste sentido, buscou-se realizar um experimento, a fim de analisar a capacidade de conservação de temperaturas de uma garrafa térmica de ampola de vidro, com o cálculo do tempo em que um líquido quente ou frio, mantém-se em uma temperatura adequada para o consumo. Além disso, o presente artigo visa demonstrar, em uma situação do cotidiano, o emprego do modelo matemático desenvolvido por Newton, através da comparação entre os dados reais e simulações computacionais. Trata-se de um exemplo de aplicação das equações diferenciais, bem como, de um processo de modelagem matemática de um fenômeno físico, o qual pode ser abordado no ensino em cursos na área da matemática e de engenharia.

O trabalho está organizado da seguinte forma: A seção 2 apresenta a técnica de modelagem utilizada neste trabalho e a metodologia detalhada da aquisição dos dados. Na seção 3 é apresentado o modelo empregado, o cálculo de parâmetros, a simulação computacional e a análise dos resultados obtidos. Finaliza-se, apresentando as conclusões.

2 METODOLOGIA/ DETALHAMENTO DAS ATIVIDADES

Segundo Aguirre (2004) "um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas das características observadas em tal sistema". Neste sentido, os modelos ajudam na percepção de como é o sistema, ou como se espera que ele seja, permitindo, em determinadas condições de operação, mudar a estrutura ou o comportamento do sistema (MONTEIRO, 2002). Quanto mais precisas estas condições, mais próximo da realidade vai ser o modelo.

Existem várias formas e técnicas relacionadas à obtenção de modelos matemáticos de sistemas reais e classificam-se em três grupos: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza. Na modelagem caixa preta, utilizada neste trabalho, não é necessário ter nenhum conhecimento a respeito do sistema que é trabalhado e nem das leis físicas que o regem (AGUIRRE, 2004).

A fim de verificar quanto tempo um líquido mantém-se quente e/ou frio, de modo que este possa ser consumido, numa temperatura ainda adequada, e, além disso, confirmar/validar o modelo matemático de resfriamento de Newton realizou-se um experimento. Para o mesmo, empregou-se uma garrafa térmica de ampola de vidro com capacidade de um litro, água quente e fria, um termômetro cilíndrico a álcool colorido e um cronômetro, de acordo com o ilustrado na figura 1.

Figura 1: Materiais utilizados no experimento

Fonte: autoria própria.

Primeiramente, aqueceu-se a água. Após ser introduzida na garrafa térmica, esta apresentava uma temperatura de $78°C$. A temperatura ambiente era de $18°C$, a qual foi considerada constante. A cada dez minutos a temperatura da água foi medida e os dados obtidos foram registrados.

Com a água gelada, o processo foi repetido, sendo que sua temperatura inicial era de $1°C$ e a temperatura ambiente era de $22,5°C$, também considerada constante.

Por meio do experimento, obtiveram-se os seguintes dados registrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Temperatura dos líquidos (quente e frio) em função do tempo.

Temperatura	**Líquido Quente**	**Líquido Frio**
0	78º	1º
10	76º	1,5º
20	74º	2º
30	73º	2,2º
40	72º	2,5º
50	71º	3º
60	69º	3,2º
70	68º	3,5º
80	67º	3,8º
90	66º	4º
100	65,5º	4,5º
110	65º	5º
120	64º	
130	63º	
140	61º	
150	60º	

Fonte: autoria própria.

Para este estudo, as temperaturas limites consideradas ainda agradáveis para o consumo foram de $60℃$ e $5℃$, para a água quente e para a fria, respectivamente.

3 RESULTADOS E ANÁLISE

O modelo de resfriamento/aquecimento de Newton denota que a temperatura de um corpo varia a uma taxa proporcional à diferença entre a sua temperatura e a temperatura do meio que o cerca (a temperatura do ambiente) (BRONSON, COSTA e SILVEIRA, 2008, ZILL e FARIAS, 2001), expresso matematicamente como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \qquad (1)$$

em que T é a temperatura do corpo (ºC), t é o tempo (minutos), k é a constante de proporcionalidade (por minuto) e T_m é a temperatura do ambiente (ºC). Salienta-se que tal modelo também pode ser utilizado para o aquecimento. Salienta-se que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente.

Deste modo, os parâmetros do modelo foram calculados analiticamente para o líquido quente, a fim de definir parâmetros para as simulações computacionais posteriores:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 18)$$

Separando as variáveis:

$$\int \frac{dT}{T-18} = -\int kdt$$
$$ln|T - 18| = -kt + c$$
$$T - 18 = ce^{-kt}$$
$$T = ce^{-kt} + 18$$

Para $t = 0$, a temperatura era de $78℃$. Assim:

$$T = ce^{-kt} + 18$$
$$78 = c + 18$$
$$c = 60℃ \qquad (2)$$

Determina-se, agora, o valor de k. Sabendo-se que para $t = 50$ o valor de T é de $71℃$, tem-se:

$$T(50) = 60e^{50k} + 18$$
$$71 - 18 = 60e^{50k}$$
$$\frac{53}{60} = e^{50k}$$

$$50k = ln\left|\frac{53}{60}\right|$$
$$k = \frac{ln\left|\frac{53}{60}\right|}{50} \qquad (3)$$

Finalmente, para um valor de temperatura igual a $60℃$, tem-se:

$$60 = 60e^{\left[0{,}02ln\left|\frac{53}{60}\right|\cdot t\right]} + 18$$
$$\frac{42}{60} = e^{\left[0{,}02ln\left|\frac{53}{60}\right|\cdot t\right]}$$
$$0{,}02ln\left|\frac{53}{60}\right| \cdot t = ln\left|\frac{21}{30}\right|$$
$$t = \frac{ln\left|\frac{21}{30}\right|}{0{,}02ln\left|\frac{53}{60}\right|}$$
$t = 143{,}76$ min.
$t = 2$ horas 23 minutos e 45 segundos.

Calculando também em relação ao líquido frio a partir da equação (1):

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22{,}5)$$
$$\int \frac{dT}{T - 22{,}5} = \int kdt$$
$$ln|T - 22{,}5| = kt + c$$
$$T - 22{,}5 = ce^{kt}$$
$$T = ce^{kt} + 22{,}5$$

Para $t = 0$, a temperatura era de $1℃$. Assim:

$$T = ce^{kt} + 22{,}5$$
$$1 = c + 21{,}5$$
$$c = -21{,}5℃ \qquad (4)$$

Sabendo-se que para $t = 50$ o valor de T é de 3℃, tem-se:

$$T(50) = -21{,}5e^{50k} + 22{,}5$$
$$3 - 22{,}5 = -21{,}5e^{50k}$$
$$\frac{-19{,}5}{-21{,}5} = e^{50k}$$
$$50k = ln\left|\frac{19{,}5}{21{,}5}\right|$$
$$k = \frac{ln\left|\frac{19{,}5}{21{,}5}\right|}{50} \qquad (5)$$

E, para um valor de temperatura igual a $5℃$, tem-se:

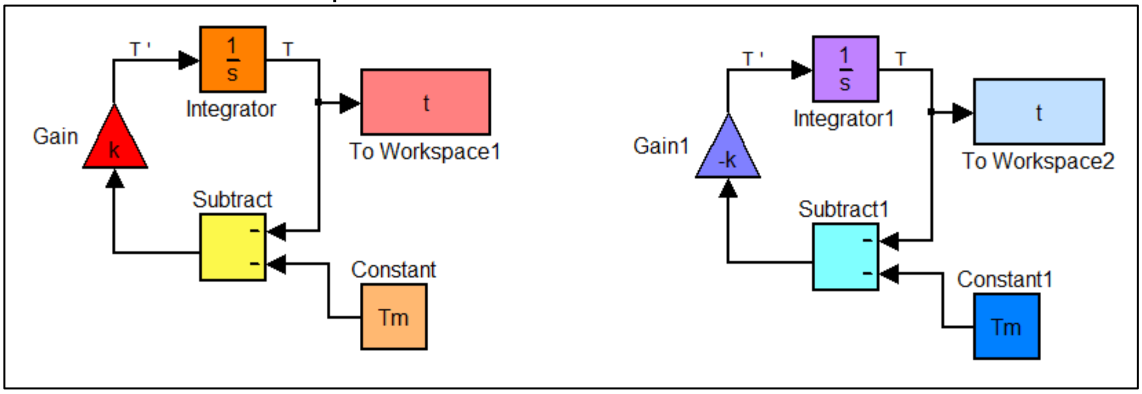
$$5 = -21{,}5e^{\left[0{,}02ln\left|\frac{19{,}5}{21{,}5}\right|\cdot t\right]} + 22{,}5$$
$$\frac{-17{,}5}{-21{,}5} = e^{\left[0{,}02ln\left|\frac{19{,}5}{21{,}5}\right|\cdot t\right]}$$
$$0{,}02ln\left|\frac{19{,}5}{21{,}5}\right| \cdot t = ln\left|\frac{17{,}5}{21{,}5}\right|$$
$$t = \frac{ln\left|\frac{17{,}5}{21{,}5}\right|}{0{,}02ln\left|\frac{19{,}5}{21{,}5}\right|}$$
$$t = 105{,}42 \text{ min.}$$
$$t = 1 \text{ hora } 45 \text{ minutos e } 25 \text{ segundos.}$$

Percebe-se que transcorre um tempo considerável para os líquidos, quente e frio, permanecerem a uma temperatura ainda agradável para consumo.

A temperatura inicial do líquido quente $(T = 78℃)$ foi definida como parâmetro, assim como a temperatura do ambiente, que foi considerada constante $(T_m = 18℃)$. No caso do líquido frio, este apresentava a temperatura inicial de $1℃$ $(T = 1℃)$, e a temperatura do meio era de $22{,}5℃$ (T_m) também considerada constante.

A partir da resolução analítica, obtiveram-se as constantes de proporcionalidade k para ambos os casos, as quais foram adotadas como parâmetros para o sistema (equações (3) e (5) listadas anteriormente). Para a simulação computacional do modelo proposto, foram utilizados dois diagramas de blocos (Figura 2), no *software* MatLab/Simulink com o parâmetro k com sinais distintos, a fim de ilustrar o aquecimento e o resfriamento dos líquidos e também compará-los aos dados registrados experimentalmente. Foi utilizado o método de integração Runge-Kutta de 4ª ordem, com passo de integração 10^{-6} e o tempo de amostragem de dez minutos.

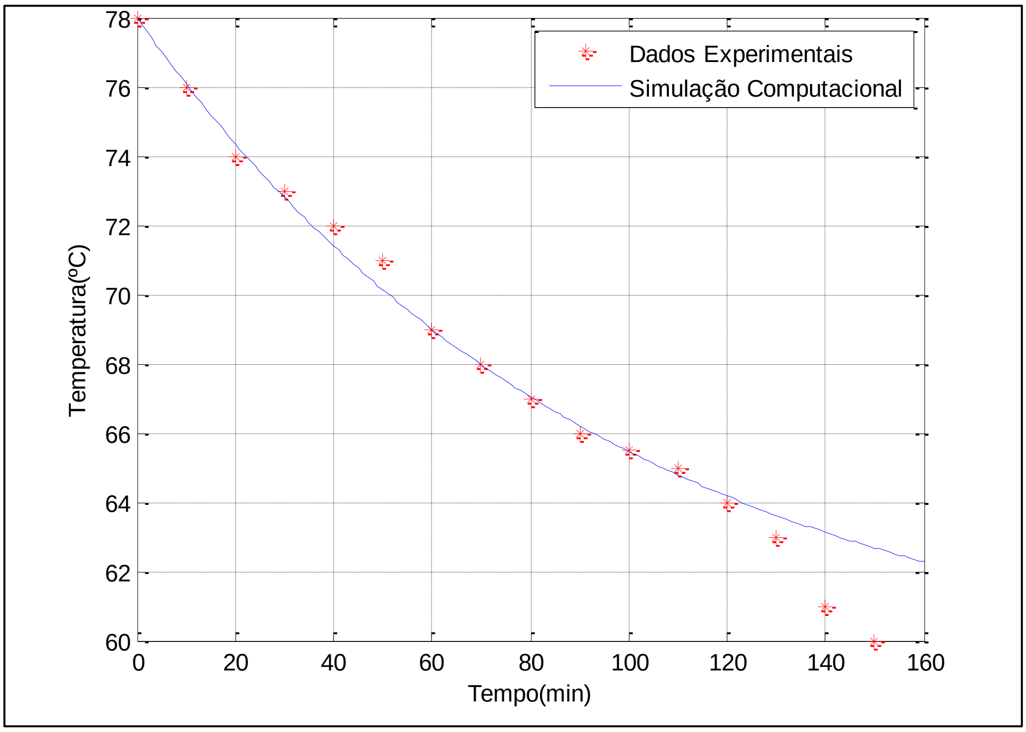
Figura 2 - Diagramas de blocos do modelo matemático da lei de aquecimento/resfriamento de Newton



Fonte: autoria própria.

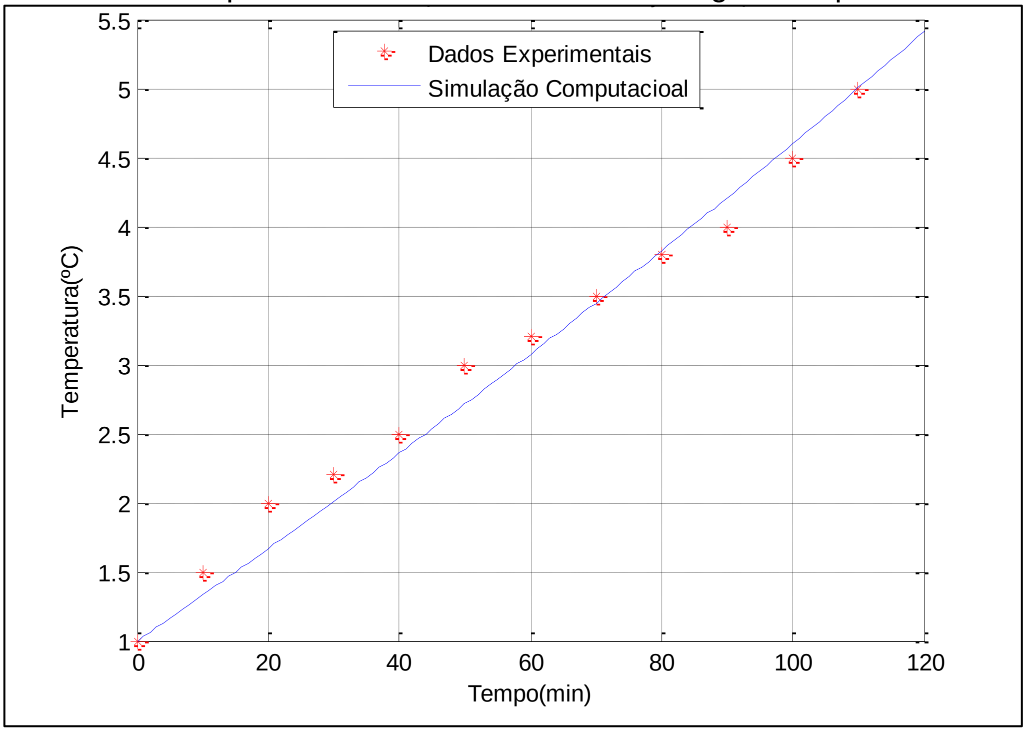
As figuras 3 e 4 a seguir, apresentam a comparação entre resultados obtidos por meio de simulações computacionais e os dados experimentais registrados na tabela 1, para as mesmas condições iniciais.

Figura 3 - Gráfico da comparação entre dados experimentais e simulados do resfriamento do líquido quente no instante $t = 0$ até atingir a temperatura de 60℃.



Fonte: autoria própria.

Figura 4 - Gráfico da comparação entre dados experimentais e simulados do aquecimento do líquido frio no instante $t = 0$ até atingir a temperatura de 5℃.



Fonte: autoria própria.

De acordo com o manual do consumidor da garrafa térmica utilizada no experimento (SOPRANO, 2017), o teste de eficiência/funcionalidade consiste em verificar se, após cerca de duas horas, a água com aproximadamente $90°C$, se mantém ainda quente. Dessa forma, a garrafa térmica utilizada neste estudo está de acordo com as exigências especificadas em seu manual.

4 CONCLUSÕES

O experimento realizado demonstrou uma das formas em que a Matemática é aplicada cotidianamente. Atividades como esta podem contribuir de maneira significativa para com o ensino de Equações Diferenciais, numa perspectiva prática através da modelagem matemática de um fenômeno real. Os resultados obtidos confirmam a capacidade de conservação de temperaturas de uma garrafa térmica, onde os dois líquidos, mantiveram-se em temperaturas consideradas adequadas para consumo durante aproximadamente duas horas, conforme previsto analiticamente. Observa-se que o comportamento obtido via simulação computacional, foi similar ao dos dados experimentais. Justifica-se a diferença entre as curvas pelo fato de a temperatura ambiente ter sido considerada constante, pois sabe-se que na realidade, ela sofre variações. Além disso, existem diversas influências na variação da temperatura, tais como: se a garrafa manteve-se fechada todo o tempo, o volume de líquido armazenado, entre outras.

5 REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte.** 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BRONSON, R; COSTA, G; SILVEIRA, F. H. **Equações diferenciais**. 3. ed São Paulo: Makron Books do Brasil, 2008.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.

SOPRANO. **Manual do consumidor:** garrafa térmica exclusiva 1L, 1,9L e 2,5L tradição. Disponível em: < http://www.soprano.com.br/sites/default/files/downloads/portal/manual_exclusiva_1l-_19l-25l_tradicao.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2017.

STEWART, J. **Cálculo.** São Paulo: Cengage Learning, 2012.

ZILL, D. G.; FARIAS, A. A. **Equações diferenciais**. 3.ed. São Paulo: Pearson Education, 2001.