



MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO DESLOCAMENTO DE UM VEÍCULO AUTÔNOMO

Rosângela Rommel Regner¹, Aline Tampke Dombrowski², Antonio Carlos Valdiero³, Graciela Elizabeth Bönmann Bertoldo⁴, João Paulo Weselovski da Silva⁵

¹UNIJUI/ DCEEng/rosangela.regner@gmail.com

²UNIJUI/ DCEEng/alinetampke@hotmail.com

³UNIJUI/ NIMASS/ DCEEng/ valdiero@unijui.edu.br

⁴UNIJUI/ DCEEng/ graciebb14@outlook.com

⁵UNIJUI/ NIMASS/ DCEEng/jpsw1994@yahoo.com.br

RESUMO: Este artigo tem como objetivo apresentar a modelagem matemática do comportamento do deslocamento de um veículo autônomo. O modelo obtido é uma Equação Diferencial Ordinária linear de segunda ordem não homogênea. As equações que estruturam este modelo matemático são formuladas a partir das leis da Física, especificadamente a segunda lei de Newton. Dessa forma, usou-se como procedimento para resolução do problema inicial, a técnica caixa branca. A partir dos parâmetros do sistema, foram realizadas simulações computacionais usando o *software* Matlab/Simulink, sendo possível determinar o deslocamento máximo e mínimo do protótipo em relação ao tempo. Sobre essa conclusão são apresentadas considerações relevantes. Dessa forma, a modelagem matemática foi uma importante ferramenta para compreender conceitos e resolver problema de outra área do conhecimento, possibilitando verificar as etapas da modelagem Matemática.

Palavras Chaves: Modelagem. Veículo. Deslocamento.

1 INTRODUÇÃO

No Núcleo de Inovação em Máquinas Automáticas e Servo Sistemas (NIMASS) da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUI), localizado no Campus de Panambi-RS, está sendo desenvolvido um veículo autônomo, o qual encontra-se em fase de projeto e construção do protótipo.

Esse veículo tem como propósito fazer a captura de imagens, realizar o monitoramento de ervas daninhas, verificar a qualidade das plantas e dos frutos e fazer o monitoramento de pragas, objetivando inspecionar lavouras no contexto da agricultura de precisão. Para esse veículo busca-se desenvolver soluções mecatrônicas de baixo custo e assim torná-lo viável para ser usado na agricultura familiar.

Estimar o deslocamento desse veículo em relação ao tempo utilizando a modelagem matemática é vantajoso no sentido de que exige menos recursos e tempo do que seria necessário com a investigação experimental. Além disso, permite simular o comportamento do veículo autônomo em situações próprias

de funcionamento, considerando seus dados ímpares e características singulares.

Nesse contexto, cabe salientar que este trabalho é uma combinação de teoria, realidade e simulações computacionais, onde se considera que:

Assim como as teorias científicas, as simulações computacionais são desenvolvidas com base em modelos e nunca abarcam todas as características do sistema físico. Os modelos computacionais são “recortes” da realidade, ou seja, são implementações computacionais de modelos específicos, e, como tais, desprezam diversos aspectos do sistema real, a fim de focar a atenção em certos aspectos particulares da natureza, o que facilita a compreensão do fenômeno físico. (HEIDEMANN, 2012, p. 972)

Há várias técnicas de modelagem matemática, as quais podem ser classificadas em três grupos distintos: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza. Para realização desta pesquisa foi utilizada a técnica da caixa branca, a qual exige que se conheça o sistema a ser modelado. Nesse contexto, fez-se uso de leis da Física, em especial a segunda lei de Newton, que se refere a massa de um corpo, relacionando-a a aceleração e às forças que agem sobre ele.

Além disso, para a realização de simulações computacionais, foi utilizado o *software* Matlab/ Simulink, o qual Garcia (1997) considera uma ferramenta didática que serve para modelar, simular e analisar sistemas dinâmicos, suporta sistemas lineares e não lineares. O Simulink inclui uma biblioteca de blocos pré-definidos passivos de personalização a fim de se ajustarem às necessidades do modelo, proporcionando um melhor entendimento.

Aliando teoria e prática e buscando suporte em outra área do conhecimento, concorda-se com Bassanezi (2004) quando ele afirma que “a Modelagem Matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

A Modelagem Matemática é vista como um conjunto de etapas progressivas, podendo-se destacar: “a experimentação (obtenção dos dados), a abstração (seleção de variáveis, problematização, levantamento de hipóteses e simplificação), a resolução (obtenção de equações, gráficos ou figuras), a validação (aceitação ou não do modelo) e a modificação (melhorias ou alterações no modelo)”. (BASSANEZI, 2006, p. 26-32).

Neste sentido, o principal objetivo desse estudo é representar uma situação do mundo real por meio de um modelo matemático, isto é, a partir de uma Equação Diferencial Ordinária, apresentar a modelagem matemática do comportamento do deslocamento de um veículo autônomo.

A seção 2 apresenta a metodologia adotada neste trabalho. Na seção 3 são apresentados os resultados. As conclusões e as perspectivas futuras estão na seção 4 e por fim têm-se as referências bibliográficas.

2 METODOLOGIA/ DETALHAMENTO DAS ATIVIDADES

O modelo matemático do deslocamento veicular foi formulado utilizando a técnica da caixa branca, também conhecida como modelagem conceitual ou fenomenológica. Essa técnica é baseada na física do processo, ou seja, exige

conhecimento das leis físicas que explicam os fenômenos envolvidos no sistema.

Os parâmetros utilizados foram obtidos a partir de medições (massa do veículo, por exemplo) e cálculos (força de tração), sendo estimado o valor do coeficiente de atrito viscoso (C_D) pelo fato de não se ter conhecimento da densidade do ar nem da velocidade que o veículo autônomo pode adquirir, variáveis estas necessárias para determinar este coeficiente.

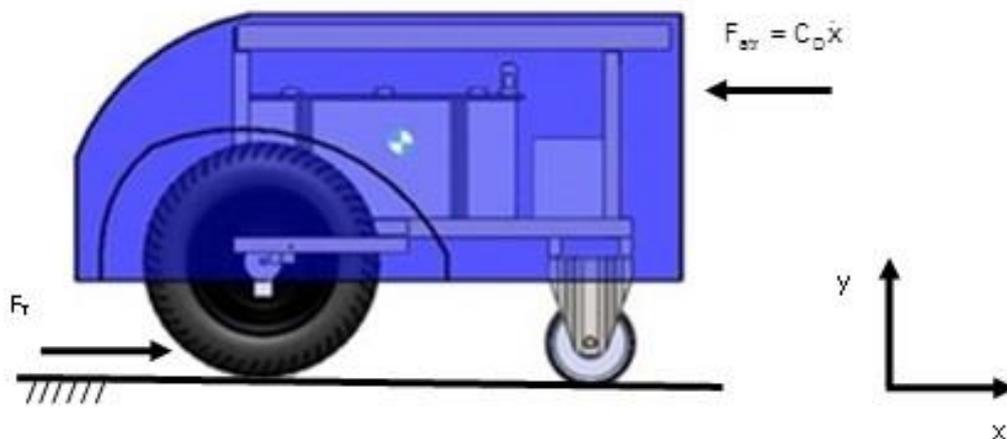
Para representar graficamente o deslocamento do veículo foi feito um diagrama de bloco no simulink, a partir da Equação Diferencial Ordinária linear de segunda ordem não homogênea que representa o deslocamento veicular.

Tendo o diagrama de blocos, foram lançados outros dados no Matlab, como por exemplo, massa e coeficiente de atrito viscoso. A partir disso, realizaram-se representações gráficas e simulações computacionais. Em seguida foram analisadas cada uma delas para, posteriormente, chegar às conclusões apresentadas no item seguinte deste artigo.

3 RESULTADOS E ANÁLISE

Em Brezolin et al. (2014) foi apresentada a modelagem da dinâmica da velocidade de um veículo. Nesta seção, apresenta-se a modelagem da dinâmica da posição de um veículo autônomo. Quando um corpo se move, há a força de atrito e a força de tração agindo em sentidos contrários sobre ele. Além disso, a força de atrito tem influência do atrito viscoso do ar que age nos corpos em movimento, conforme ilustra a figura 1:

Figura 1: Desenho esquemático representando o veículo autônomo e as forças atuantes



Fonte: Autores.

O comportamento dinâmico da velocidade veicular é descrito por uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem não homogênea, conforme segue:

$$\sum F_x = m \cdot \ddot{x} \quad (1)$$

$$F_T - F_{atr} = m \cdot \ddot{x} \quad (2)$$

Considerando $F_{atr} = C_D \dot{x}$, tem-se:

$$m\ddot{x} + C_D\dot{x} = F_T \quad (3)$$

onde $\sum F_x$ é a soma das forças que agem na direção do eixo x e, de acordo com a figura 1, tem-se duas forças contrárias agindo: força de tração (F_T) e força de atrito (F_{atr}).

Conforme Bonadiman (2002, p. 6) “a segunda lei de Newton [...] afirma que o módulo da resultante das forças que agem num corpo é igual à massa desse corpo multiplicada pela sua aceleração”. Assim, explica-se a equação (2) apresentada anteriormente, em que a resultante das forças F_T e F_{atr} corresponde à massa do veículo multiplicada pela aceleração ($m \cdot \ddot{x}$), sabendo que a aceleração é a derivada segunda do deslocamento. Organizando a equação (3), tem-se:

$$\ddot{x} + \frac{C_D}{m} \dot{x} = \frac{1}{m} \cdot F_T \quad (4)$$

O modelo matemático anterior (4) representa a posição do veículo, onde m corresponde à massa total do carro, C_D ao coeficiente de atrito viscoso, \dot{x} à velocidade inicial, \ddot{x} à aceleração e F_T à força de tração. Os valores dos parâmetros utilizados encontram-se na tabela 1, conforme segue:

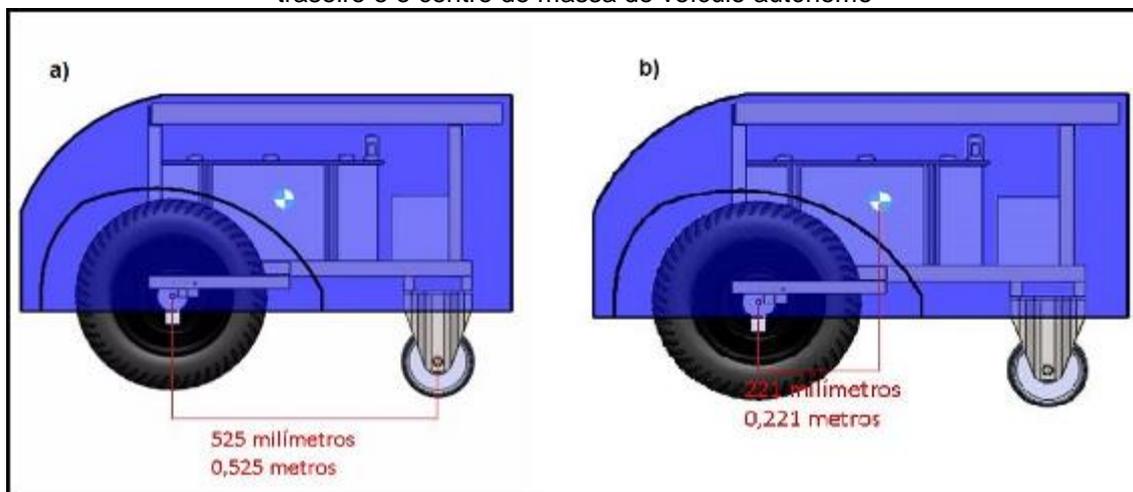
Tabela 1: Parâmetros da dinâmica do atrito veicular

Descrição do parâmetro	Notação	Valores	Observações
Massa do veículo	M	57, 560 Kg	Valor real
Força de tração	F_T	326,63 N	Valor calculado
Coeficiente de atrito viscoso	C_D	100 N. s/m e 1 N. s/m	Valor estimado

Fonte: Autores.

Para determinar a força de tração (F_T), foram consideradas as medidas originais do protótipo, conforme ilustra a figura 2:

Figura 2: **a)** Medida da distância entre os eixos dianteiro e traseiro; **b)** medida entre o eixo traseiro e o centro de massa do veículo autônomo



Fonte: Autores.

A força de atrito, que inclui o efeito das duas rodas traseiras, sendo responsável pelo movimento do veículo, é diretamente proporcional ao módulo da força normal entre um corpo e a superfície de contato. A força de tração é representada por uma inequação, a qual apresenta o limite que a força de tração pode chegar. Partindo desse pressuposto, tem-se:

$$F_{T_{\max}} \leq \mu \cdot N_T \quad (5)$$

Considerando $\mu = 1$, tem-se:

$$F_{T_{\max}} = \mu \cdot N_T \quad (6)$$

$$\sum T_D = 0 \quad (7)$$

$$m \cdot g \cdot L_{cg} - N_T \cdot L = 0 \quad (8)$$

$$N_T = \frac{m \cdot g \cdot L_{cg}}{L} \quad (9)$$

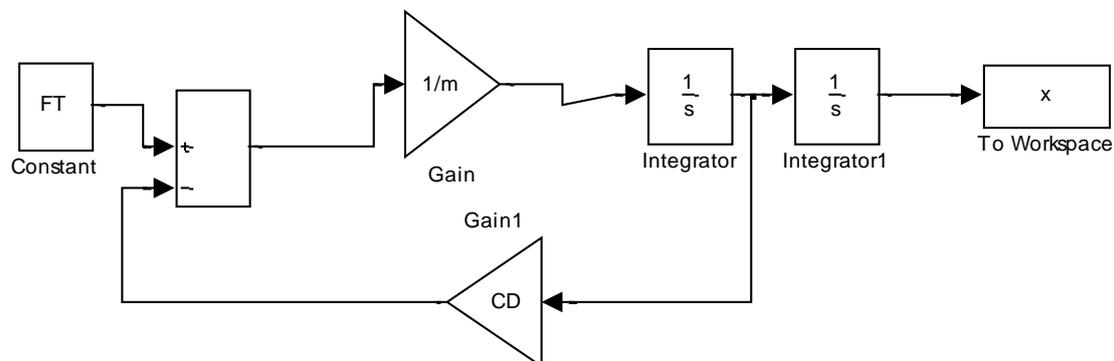
Onde $F_{T_{\max}}$ é a força de tração máxima, N_T é a força normal traseira, μ é o coeficiente de atrito, $m \cdot g$ representa a força peso que depende da massa (m) do veículo e da aceleração da gravidade (g), L_{cg} é a distância entre o centro de gravidade e o eixo dianteiro e L é a distância entre os eixos dianteiro e traseiro.

A partir da equação (9), determina-se a força de tração máxima, assumindo-se que esta é igual à força normal traseira (N_T) e considerando a aceleração da gravidade ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$, correspondente ao valor aproximado da gravidade na terra, conforme segue:

$$N_T = \frac{57,560 \cdot 9,8 \cdot 0,304}{0,525} \cong 326,63 \text{ N}$$

Com base na equação (4) e utilizando-se o *software* Matlab/ Simulink construiu-se o diagrama de blocos apresentado na figura 3:

Figura 3 - Diagrama de blocos do modelo matemático (4) que representa a posição do veículo em relação ao tempo

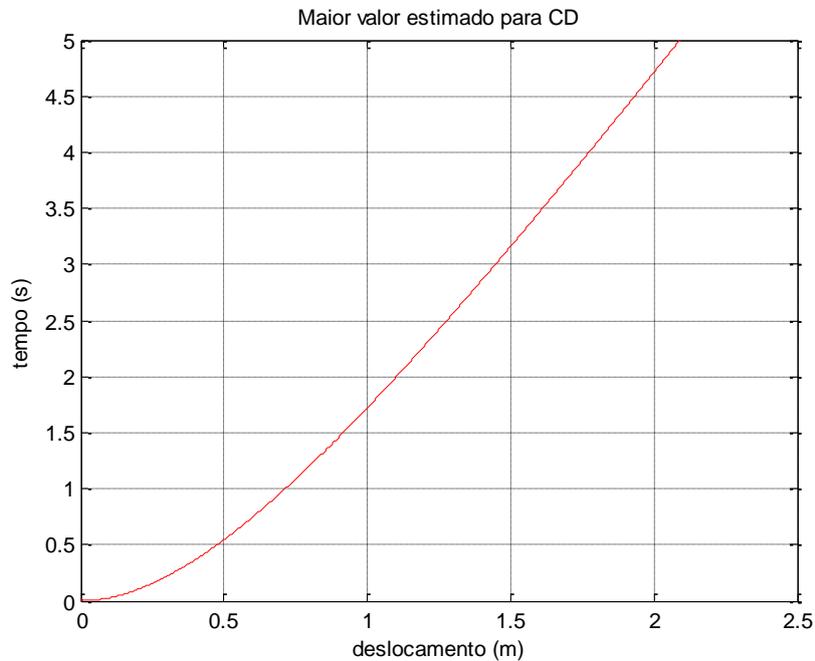


Fonte: Autores.

Posteriormente, no Matlab/ Simulink foi elaborado um arquivo para armazenar dados, parâmetros e variáveis do sistema, e outro arquivo para gerar os gráficos. Na intenção de identificar um intervalo que represente o

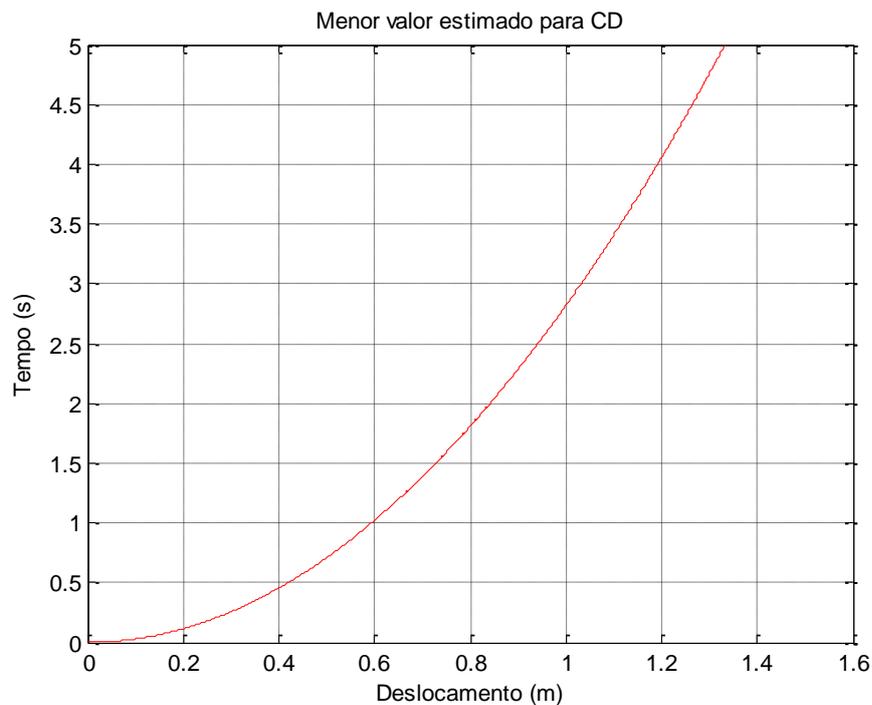
deslocamento do veículo autônomo num determinado período de tempo, foram realizadas diversas simulações computacionais, das quais se analisa as figuras 4 e 5 mostradas a seguir, pois propiciam a obtenção de considerações importante, conforme segue:

Figura 4 – Gráfico da simulação computacional com o maior valor estimado para o coeficiente de atrito viscoso ($C_D = 100 \text{ N. s/m}$)



Fonte: Autores.

Figura 5 – Gráfico da simulação computacional com o menor valor estimado para o coeficiente de atrito viscoso ($C_D = 1 \text{ N. s/m}$)



Fonte: Autores.

Para realização das simulações computacionais foram consideradas fixas a velocidade inicial (nula), a massa do protótipo e a força de tração, conforme descrito na tabela 1. Variou-se o C_D , atribuindo-se valores considerados grandes e pequenos. Assim, foi possível concluir que o veículo autônomo desenvolverá deslocamento que poderá variar de 0,6 metros em um segundo a, aproximadamente, 0,75 metros em um segundo.

Cabe salientar que o referido veículo poderá atingir deslocamento um pouco maior em relação ao tempo do que o apresentado aqui, considerando que tem um motor para cada roda e eles estão acoplados diretamente nos eixos, fazendo com que não se tenha redução de rotação. Além disso, o veículo é leve.

Sendo assim, vale ressaltar que o valor do deslocamento veicular em função do tempo encontrado com base na modelagem matemática poderá ser confirmado ou não conforme evoluir o projeto do protótipo e este estiver nas fases de testes.

Nesse contexto, o modelo matemático utilizado é considerado válido, pois permitiu aplicar as informações captadas em relação ao veículo autônomo e serviu como auxílio para compreender o problema inicial, sendo que futuramente possibilitará confrontar os dados obtidos por simulações computacionais com os dados reais. Os resultados deste trabalho, juntamente com o resultado do planejamento de trajetórias (KINALSKI et al., 2017), serão utilizados para o desenvolvimento de uma estratégia de controle de posição do veículo em rotas programadas.

4 CONCLUSÕES

A modelagem matemática permite a construção de conhecimentos e utiliza teorias para resolução de problemas reais de nosso cotidiano, auxiliando na obtenção de modelos matemáticos bem como a validação/aceitação dos mesmos.

A partir da Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem não homogênea que representa o deslocamento veicular e através de simulações computacionais, concluiu-se o veículo autônomo em estudo poderá percorrer de 0,6 m a 0,75 m em um segundo.

A experiência obtida através da utilização do *software* Matlab/Simulink é outro fator considerado de grande relevância, pois permitiu conhecer o referido programa computacional e fazer uso do mesmo para simulações importantes a serem avaliadas nos resultados da pesquisa, enriquecendo a metodologia e associando de forma harmoniosa a modelagem e a tecnologia.

Nesse contexto, sugere-se como continuação desta pesquisa, a evolução nos testes e na construção do protótipo, a fim de confirmar ou não o cálculo determinado até o momento a partir de dados reais e simulações computacionais. Só assim será possível validar o modelo matemático implementado. Além disso, pode-se dar continuidade estudando a velocidade ideal que o veículo autônomo aqui referenciado necessita desenvolver para contemplar os objetivos pelos quais está sendo elaborado.

Como perspectivas futuras, pretende-se validar os resultados para um protótipo de veículo autônomo que está em construção no NIMASS/UNIJUÍ, que inclui o acionamento elétrico das rodas, um sistema fotovoltaico para

melhorar a autonomia das baterias e um sistema de controle de baixo custo utilizando placas de Arduíno, sistema GPS e câmara de vídeo.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil. Os autores também são agradecidos à FAPERGS e ao CNPq pelas bolsas de iniciação científica e desenvolvimento tecnológico, à UNIJUÍ e ao FINEP pelo apoio na complementação do Núcleo de Inovação em Máquinas Automáticas e Servo Sistemas (NIMASS), por meio da Chamada Pública MCTI/FINEP/CT-INFRA - PROINFRA - 02/2014 - Equipamentos Multiusuários, Ref.: 0141/16 (Protocolo Eletrônico: 124), com a liberação de recursos para compra de equipamentos para construção de protótipos para pesquisas de mestrado e doutorado.

5 REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino e aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2004.

_____. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BREZOLIN, A. P. ; BRONDANI, M. F. ; KLEIN, M. J. ; ZORZELLA, M. D. ; WILLERS, S. C. A. ; VALDIERO, A. C. . **Modelagem Matemática da Dinâmica Veicular**. In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 2014, Curitiba. Anais do CMAC-Sul. São Carlos: SBMAC, 2014. v. 1. p. 1-6.

BONADIMAN, H. **Equilíbrio**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2002. 72 p. (Coleção Cadernos Unijuí. Série Física, 05)

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação**, São Paulo: EDUSP, 1997.

HEIDEMANN, L. A. et al. **Ciclos de modelagem: uma proposta para integrar atividades baseadas em simulações computacionais e atividades experimentais no Ensino de Física**. 2012. Disponível em <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/85292/000862514.pdf?sequence=1>> Acesso em 13 de maio de 2017.

KINALSKI, N. M.; VALDIERO, A.C.; DA SILVA, J.A.G.; RASIA, L.A.; MONTOVANI, I.J. **Desafios e desenvolvimento de um modelo matemático para planejamento da trajetória de um veículo autônomo para uso na agricultura de precisão**. In: XLVI Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola, 2017, Maceió. Anais do CONBEA 2017. Jaboticabal: SBEA, 2017. (Aprovado para apresentação Oral).