

DESENVOLVIMENTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DA DINÂMICA DA ALTURA DO FLUIDO EM UM RESERVATÓRIO

Ângela T. W. De Mamann¹, Douglas J. B. Freitas², Leila Ana Valer³, Osmar B. Scremin⁴, Antônio C. Valdiero⁵.

¹ UNIJUÍ/ DECEEng/Campus Ijuí, angelademamann@hotmail.com

² UNIJUÍ/ DECEEng/Campus Ijuí, douglasjoziel@hotmail.com

³ UNIJUÍ/ DECEEng/Campus Ijuí, leilavaler@gmail.com

⁴ UNIJUÍ/ DECEEng/Campus Ijuí, osmarsecremim@hotmail.com

⁵ UNIJUÍ/ DECEEng/Campus Panambi, valdiero@unijui.edu.br

RESUMO: Este artigo de cunho prático-teórico trata do desenvolvimento da formulação matemática dinâmica da altura de um fluido que escoar por um orifício de saída num reservatório cilíndrico. O modelo que prevê o comportamento da altura de fluidos em reservatórios pode ser muito útil para projeto e o controle de tanques e reservatórios em plantas e processos da indústria alimentícia e de bebidas, química e petroquímica. O objetivo do presente trabalho é desenvolver e validar experimentalmente o modelo não linear que inclua a perda de carga a partir de uma bancada experimental de laboratório. O modelo é deduzido a partir dos princípios da conservação de massa e da conservação da energia. As equações são programadas na forma de diagramas de blocos e as simulações são realizadas utilizando-se o *toolbox* Simulink, ferramenta de simulação do *software* MatLab. Os resultados computacionais e experimentais são comparados, validando-se o modelo e ilustrando-se a importância de determinação da perda de carga em orifícios.

Palavras-chave: Dinâmica de Fluidos; Matemática na Engenharia; Objeto Educacional.

1 INTRODUÇÃO

Incorporar as noções de sentido e significado às situações de ensino e aprendizagem da Matemática parece implicar uma questão básica: como ensinar e aprender Matemática, de modo que se torne importante para os estudantes? Todavia, transformar questões desse tipo em "estilos de prática educativa" pode não ser uma tarefa muito fácil. Portanto neste trabalho busca-se a validação experimental do modelo matemático que descreve a dinâmica da altura do fluido montado em uma bancada experimental, como forma de aplicar a modelagem matemática de forma prática e indutiva.

No entanto utilizou-se um modelo não linear de primeira ordem deduzido a partir do princípio da conservação da massa e pelo princípio da conservação de energia descrita pela equação de Bernoulli (BRUNETTI, 2008; SISSOM e PITTS, 1988; MASSEY, 2002; YOUNG e FREEDMAN, 2008), a partir do qual foi implementado um diagrama de blocos para simulação computacional, cujos resultados foram comparados com os resultados experimentais.

Além destes princípios, foi adicionado ao modelo a constante perda de carga causada pelo estreitamento brusco no orifício de saída do fluido e baseando-se na caracterização similar a apresentada no manual de conexões Tigre (2014).

O campo de aplicação do escoamento de fluido tem grande aplicação prática, segundo Brunetti (2008), canais e condutos, a lubrificação, os esforços em garagem, os corpos flutuantes, as máquinas hidráulicas, a ventilação, a aerodinâmica e muitos outros assuntos lançam mão das leis da Mecânica dos Fluidos para obter resultados de aplicação.

Este trabalho apresenta uma breve revisão bibliográfica com definições e conceitos sobre mecânica dos fluidos na Seção 2.1. Na Seção 2.2 apresenta-se a bancada experimental, na qual obteve-se os dados e parâmetros para o modelo e também os resultados experimentais para a comparação com a simulação do modelo matemático. A Seção 2.3 descreve a formulação e o desenvolvimento do modelo matemático de 1ª ordem que prevê o escoamento do fluido, a Seção 3 mostra os resultados obtidos na modelagem matemática e as simulações computacionais, validados nos testes experimentais. Finalizando, apresentam-se as conclusões.

2 METODOLOGIA

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção trata do levantamento de alguns trabalhos publicados envolvendo a modelagem matemática bem como conceitos envolvendo a dinâmica de fluidos. Segundo Aguirre (2004), a Modelagem Matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de implementar modelos matemáticos de modelos reais, utilizando regras e etapas predefinidas.

Uma das técnicas utilizadas para a modelagem e que neste trabalho foi utilizada é conhecida como modelagem caixa branca. Nesse método é necessário conhecer bem o sistema com o qual se está lidando, bem como as leis físicas que descrevem o sistema a ser modelado (AGUIRRE, 2004).

Para tanto se sabe que “um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por uma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto. Dessa forma, o sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam com o tempo” (MONTEIRO, 2002).

Outra característica relevante é que a maioria dos sistemas dinâmicos apresentam-se de forma não linear, entretanto, sob determinadas condições, a solução exata de uma equação diferencial não linear nem sempre é possível. Segundo Monteiro (2002), o sistema não linear pode ser aproximado em torno de seu ponto de equilíbrio, por um sistema linear, processo chamado de linearização.

Um sistema designa-se não-linear sempre que na sua constituição intervenha pelo menos um componente ou um subsistema não-linear (DOICO, 2011). Na dinâmica da altura do fluido, o modelo se configura de primeira ordem e não-linear caracterizado por um escoamento linear com perdas de cargas por fricção, ou seja, a velocidade do fluido no centro é maior em relação às proximidades das paredes.

Entende-se por fluido um conjunto de moléculas que estão aleatoriamente arranjadas e mantidas juntas por forças coesivas fracas entre moléculas e por forças exercidas pelas paredes de um recipiente (SERWAY, 2012). Além disso, é uma substância que não tem uma forma própria, assume o formato do recipiente (BRUNETTI, 2008, p.1) e são denominados líquidos e gases.

A forma de como o fluxo se comporta é denominado de escoamento que será turbulento quando o fluxo é irregular caracterizado por regiões com pequenos redemoinhos, e o escoamento será laminar quando as partículas do fluido não se cruzam, seguem uma trajetória suave e sua velocidade em qualquer ponto permanece constante no tempo.

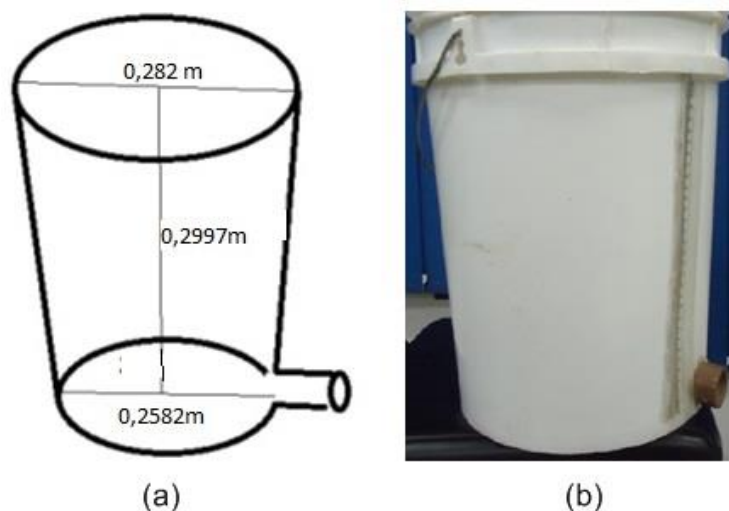
A propriedade que indica a maior e a menor dificuldade de o fluido escoar é chamada de viscosidade que geralmente é utilizado no escoamento de fluidos para caracterizar o grau de atrito interno do fluido (SERWAY, 2012). A força viscosa está associada a duas camadas adjacentes do fluido que se opõem ao movimento entre elas. Apesar de fisicamente não ocorrer, em muitos casos por ser um efeito secundário, a viscosidade é considerada nula e com isso admite-se que o escoamento não possui perda de energia por atrito. Além disso, admite-se que este fluido é incompressível, ou seja, seu volume não varia com a mudança de pressão, neste caso o fluido é dito ideal (BRUNETTI, 2008, p.10).

No escoamento há perdas de cargas causadas por dissipação viscosas. Massey (2002) apresenta uma descrição do problema da perda de carga em um estreitamento brusco, entretanto neste trabalho adota-se a perda de carga como uma perda de pressão considerando o coeficiente de perda de carga encontrado na ficha técnica de tubos e conexões apresentada em Tigre (2014).

2.2 DESCRIÇÃO DA BANCADA EXPERIMENTAL

O processo para a validação do modelo iniciou-se com a construção de uma bancada experimental composta por um reservatório de fluxo de formato considerado aproximadamente cilíndrico. Na parte inferior do recipiente tem-se um orifício lateral de área A_2 , por onde jorra a água para fora para a coleta de dados, de acordo com a Figura 1.

Figura 1: Bancada de testes: (a) desenho e (b) foto do recipiente utilizado.



Fonte: elaborado pelos autores.

A altura do líquido (água) foi monitorada através de marcações feitas no recipiente e pela filmagem, com isso foi possível retirar a cada segundo a altura da camada de líquido conforme fotografia mostrada na Figura 2.

Figura 2: Fotografia do sistema de medição da altura no teste experimental.



Fonte: elaborado pelos autores.

Após a coleta dos dados, os mesmos foram processados para deixá-los em forma de matrizes, dispondo a altura do fluido em função do tempo, tornando-os manipuláveis pelo *software* MatLab, onde foram armazenados em forma de estrutura.

Para a construção dos diagramas de blocos e simulação computacional foi utilizando o *toolbox* Simulink, ferramenta de simulação do *software* MatLab, com aplicação do método numérico Runge-Kutta de 4ª ordem, com passo de integração 10^{-5} e o período analisado em cada simulação de 10 segundos.

A Tabela 1 apresenta os principais valores dos parâmetros construtivos e característicos da bancada experimental utilizada na modelagem matemática e validação experimental.

É importante destacar que esta bancada experimental serve de objeto educacional para ensino de mecânica dos fluidos em cursos de engenharia e também para a contextualização de aplicações de equações diferenciais ordinárias no ensino de matemática e cálculo diferencial.

Tabela 1 – Valores adotados para os parâmetros do modelo matemático da dinâmica da altura do fluido de acordo com a bancada da Figura 1.

Descrição do parâmetro	Notação	Valores	Observações:
Altura inicial da coluna do fluido	H	0,2997 m	Determinado a partir da medição com régua.
Diâmetro médio do reservatório	D	0,27 m	Determinado a partir da medição com régua..
Diâmetro da saída	d_2	0,016 m	Determinado a partir da medição com régua.
Diâmetro da saída	d_3	0,022 m	Determinado a partir da medição com régua.
Aceleração da gravidade	G	9.81 m/s ²	Valor adotado a partir da referência Young (2008).
Coeficiente de perda de carga no estreitamento brusco	ζ		Ajustado por simulações computacionais.
Vazão de entrada	q_{in}	0	Não há vazão de entrada no teste experimental.

Fonte: elaborado pelos autores.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

O modelo matemático da dinâmica da altura do fluido através da técnica de modelagem caixa branca, a qual se usa das leis físicas tem como objetivo definir os parâmetros e variáveis que a envolvem para posteriormente deduzir a equação diferencial ordinária de primeira ordem que demonstra o comportamento do fluxo em relação à altura do fluido.

Para a simplificação do modelo serão consideradas as propriedades do fluido ideal em regime permanente.

Pelo princípio da conservação da massa, a diferença entre a vazão que entra (q_{in}) e a vazão que sai (q_{out}) é igual a variação do volume do reservatório em função do tempo (dV/dt):

$$q_{in} - q_{out} = \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

Substituindo $\frac{dV}{dt} = A_1 \cdot h'$ na equação (1), tem-se:

$$q_{in} - q_{out} = A_1 \cdot h' , \quad (2)$$

onde A_1 é a área do reservatório e h' é variação da altura do reservatório.

Pelo princípio da conservação de energia descrita pela equação de Bernoulli (SEARS & ZEMANSKY, 2008):

$$p_i + \rho g h_i + \frac{1}{2} \rho v_i^2 = cte \quad (3)$$

Aplicando a equação de Bernoulli em uma das linhas de fluxo em dois pontos distintos e considerando a perda de carga Δp , sendo uma não linearidade suave do sistema, tem-se:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta p \quad (4)$$

Sendo que $\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \zeta$, enunciada de forma similar que em Tigre (2014).

A equação (4) se resume em:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \zeta \quad (5)$$

Utilizando as hipóteses: $p_1 \approx p_2 \approx p_{atm}$ e a $A_1 \gg A_2$ então $v_1 \approx 0$ tem-se a equação:

$$g h_1 = g h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{1}{2} v_2^2 \zeta \quad (6)$$

Subtraindo $g h_2$ em ambos os membros da igualdade e colocando os termos comuns em evidência na equação (6):

$$g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} v_2^2 (1 + \zeta) \quad (7)$$

Substituindo $h_1 - h_2$ por h e isolando-se v_2 em (7) obtém-se:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}^{1/2}}{(1 + \zeta)^{1/2}} \quad (8)$$

Sendo que a vazão de saída é dada pela equação:

$$q_{out} = v_2 A_2 \quad (9)$$

Substituindo (8) e (9) em (2) obtém-se:

$$q_{in} - A_2 \frac{\sqrt{2gh}^{1/2}}{(1 + \zeta)^{1/2}} = A_1 . h' \quad (10)$$

Dividindo-se (10) por A_1

$$h' + \frac{A_2}{A_1} \frac{\sqrt{2gh}^{1/2}}{(1 + \zeta)^{1/2}} = \frac{1}{A_1} q_{in} \quad (11)$$

Como $\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}$ é definida uma constante k_f e $\frac{1}{(1+\zeta)^{1/2}}$ é uma constante

k_c do sistema, então:

$$h' + \frac{k_f}{k_c} h^{1/2} = \frac{1}{A_1} q_{in} \quad (12)$$

A equação (12) representa a equação diferencial ordinária não-linear, não homogênea de primeira ordem que descreve a dinâmica da altura do fluido, considerando a perda de carga.

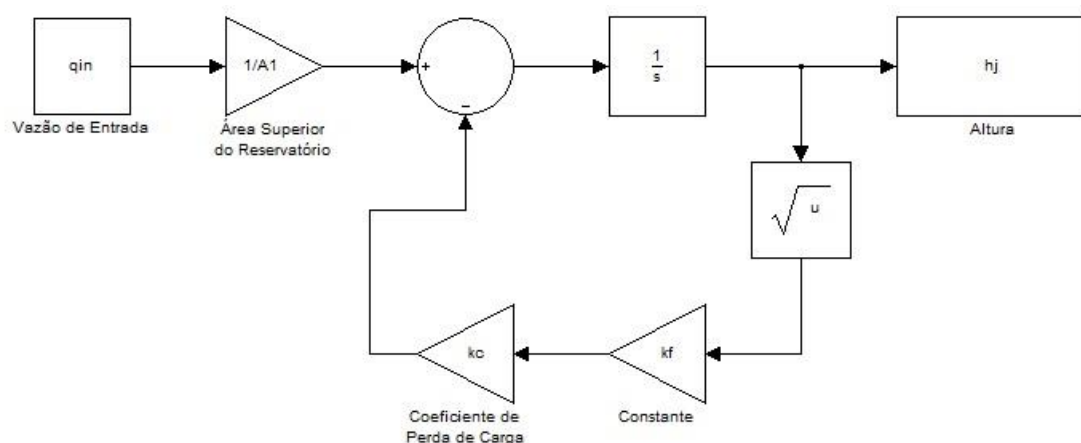
Desconsiderando a perda de carga no modelo já demonstrado conclui-se:

$$h' + k_f h^{1/2} = \frac{1}{A_1} q_{in} \quad (13)$$

3 RESULTADOS E ANÁLISE

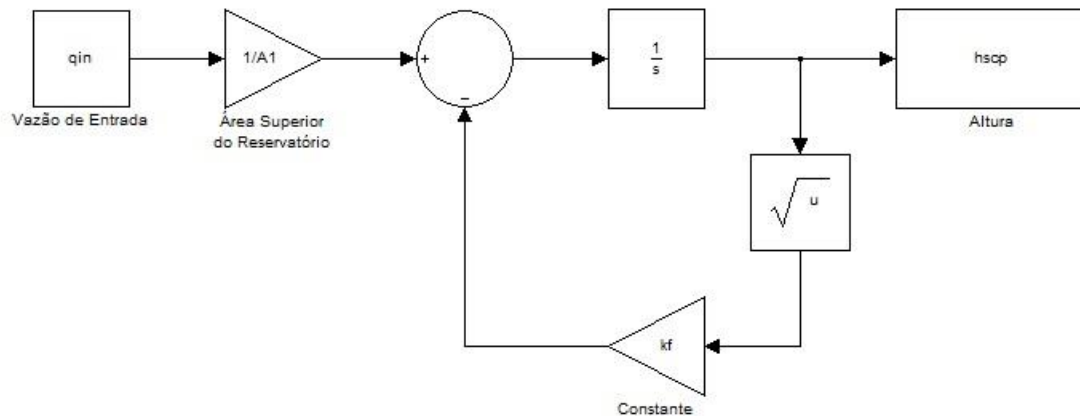
Apresenta-se como resultado a simulação computacional da dinâmica do escoamento do fluido comparando com os testes experimentais. As simulações computacionais foram realizadas no *toolbox* Simulink, do *software* MatLab, com *scripts* de programação m-file (i.e., extensão *.m) e o diagrama de blocos da Figura 3, considerando perda de carga e da figura 4 desconsiderando a perda de carga, utilizando-se o método de integração Runge-Kutta de 4ª ordem, com passo de integração 10^{-3} e o tempo de amostragem igual ao da captura dos dados experimentais.

Figura 3: Diagrama de blocos para simulação com perda de carga.



Fonte: elaborado pelos autores.

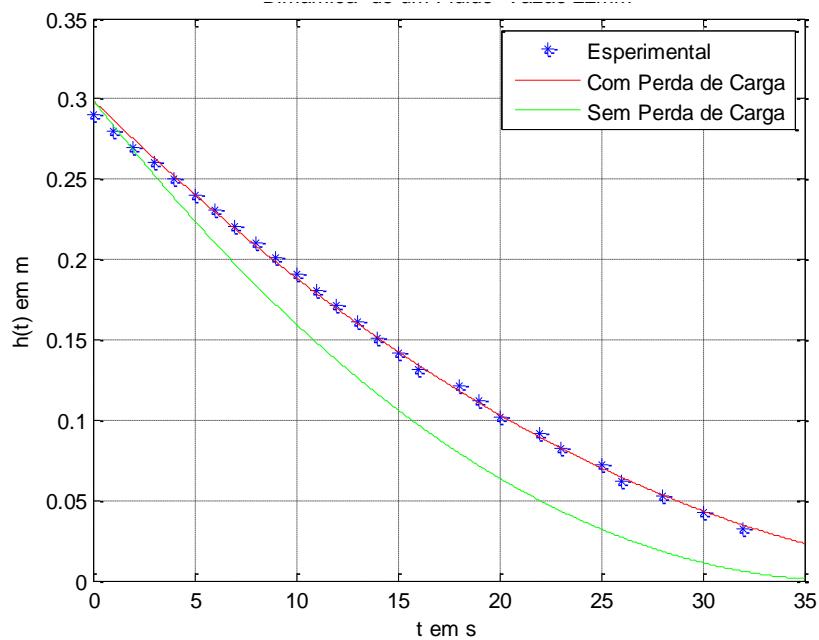
Figura 4: Diagrama de blocos para simulação sem perda de carga.



Fonte: elaborado pelos autores.

Os resultados das simulações computacionais e dos testes experimentais com o orifício de saída de diâmetro de 22 mm são comparados na Figura 5. Note que sem a não linearidade da perda de carga no orifício de saída, a velocidade teórica do fluido da saída seria maior e a altura do fluido seria mais baixa no mesmo instante de tempo. Entretanto a perda de carga que ocorre no sistema dinâmico real tem o efeito de atraso no tempo da dinâmica da altura do fluido no reservatório. Tal não linearidade de perda de carga foi incluída com sucesso no modelo matemático desenvolvido e permitiu a validação experimental, sendo portanto muito importante na modelagem matemática para previsão do comportamento da altura do fluido.

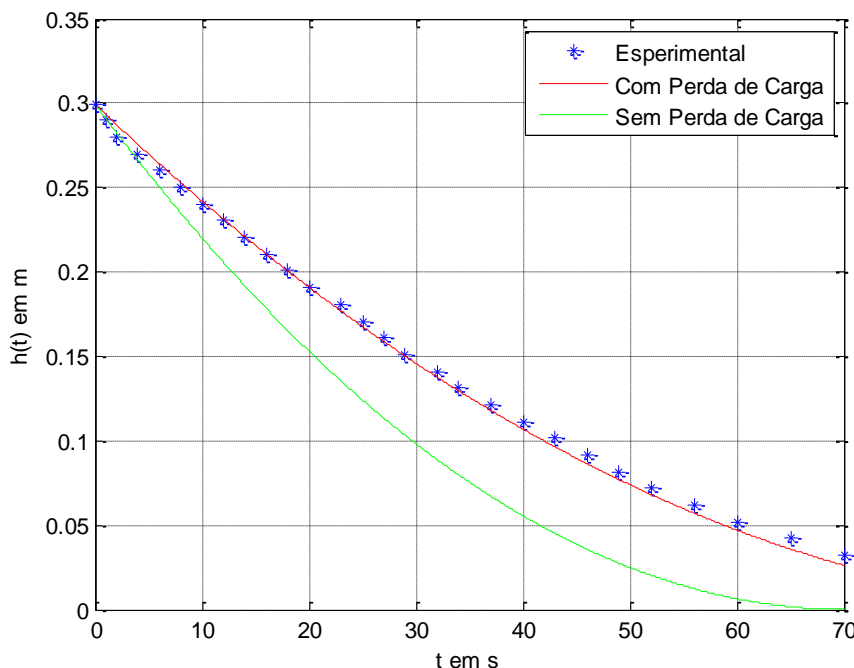
Figura 5: Gráfico comparativo da validação experimental do modelo do comportamento para diâmetro do orifício de saída igual a 22 mm, com e sem perda de carga.



Fonte: elaborado pelos autores.

Na Figura 6 são apresentados os gráficos comparativos dos resultados das simulações computacionais e dos testes experimentais com o orifício de saída de diâmetro de 16 mm. Nota-se que quanto menor o diâmetro do orifício de saída, maior é o valor da perda de carga. Pode-se assim determinar o coeficiente de perda de carga para cada diâmetro do orifício de saída.

Figura 6: Gráfico comparativo da validação experimental do modelo do comportamento para diâmetro do orifício de saída igual a 16 mm, com e sem perda de carga.



Fonte: elaborado pelos autores.

O ζ é ajustado conforme a área de estreitamento da saída, observando que quanto maior a área de saída menor o valor de ζ . Para simulação da figura 5 o valor de ζ é 0,7, já na figura 6 o ζ é 1. Assim pode-se obter uma relação entre a área de vazão e a constante ζ que pode ser estabelecido para outros diâmetros por interpolação.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se a formulação matemática para o modelo dinâmico do comportamento da altura de um fluido num reservatório. A maior contribuição foi à inclusão da não linearidade da perda de carga em orifícios na modelagem e a validação experimental numa bancada de testes em laboratório. Os resultados obtidos na simulação computacional em comparação com os resultados dos testes experimentais ilustram as características do modelo desenvolvido e a importância da inclusão da não linearidade da perda de carga em orifícios de saída. O trabalho também contribui para o ensino de fenômenos de engenharia com a utilização da modelagem matemática, tornando a aprendizagem mais significativa para os estudantes. Trabalhos futuros preveem a utilização do modelo desenvolvido em estratégias de controle aplicado a plantas de processos com fluidos.

5 REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 2. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2004.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2002.
- BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- SEARS; ZEMANSKY. **Física, volume 2**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2008.
- SISSOM, L. E.; PITTS, D. R. **Fenômenos de Transporte**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1988.
- MASSEY, B. S. **Mecânica dos fluidos**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R.A. **Física II: Termodinâmica e ondas**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2008.
- DOICO, C. M. **Dinâmica de um pulverizador torre com suspensão veicular: um enfoque do método de média**. 2011. 79 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática – Mestrado) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2011.
- TIGRE. **Ficha Técnica Tigre Tubos e Conexões**. Disponível em: <http://www.tigre.com.br/pt/download_ficha.php?tipo_arq=linha&file=linha_278.pdf>. Acesso em: 01 set. 2014.