**UMA REFLEXÃO SOBRE DIFICULDADES E OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A PARTIR DOS SISTEMAS DE CONCEITOS E ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL**

Julian da Silva Lima1, Neiva Ignês Grando2

1Universidade de Passo Fundo/Programa de Pós-graduação em Educação, lima-julian@bol.com.br

2Universidade de Passo Fundo/Programa de Pós-graduação em Educação, neiva@upf.br

**RESUMO:** Este trabalho analisa a formação dos conceitos de limite e derivada, conceitos base estudados na primeira fase do Cálculo Diferencial e Integral, identificando nestes os conhecimentos anteriores necessários para suas formações, estabelecendo sistemas de conceitos, buscando assim, refletir sobre as causas das dificuldades e obstáculos por parte dos alunos no aprendizado e na formação destes conceitos. A partir das dificuldades, obstáculos, sistemas de conceitos e zona de desenvolvimento proximal, foram analisadas as definições de limites e derivadas. Dessa forma identificaram-se algumas causas de dificuldades e obstáculos na aprendizagem e formação dos conceitos analisados, evidenciando a necessidade de uma avaliação cuidadosa por parte do professor sobre os conceitos anteriormente formados pelo aluno para aprendizagem de novos conhecimentos.

**Palavras chaves:** cálculo; dificuldades; obstáculos**.**

**1 INTRODUÇÃO**

A matemática está presente em diversas áreas de formação do ensino superior e, em alguns cursos por vezes tira o sono de uma boa parcela dos alunos. O Cálculo Diferencial e Integral presente em todos os cursos de ciências exatas, entre outros, como nas engenharias, reprova e é motivo de evasão, como demonstram as pesquisas sobre este tema. As dificuldades na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral se tornam notórias vistas às reprovações, em que, em certos casos a disciplina precisa ser repetida duas, três ou mais vezes. As reprovações e dificuldades na aprendizagem da disciplina podem ser abordadas em diversos pontos possíveis, causadores das mesmas, como falta de preparo dos alunos, práticas pedagógicas adotadas pelos professores, falta de hábito para o estudo por parte dos alunos, que não condiz com as exigências do ensino superior, entre outros. A formação de conceitos no Cálculo Diferencial e Integral, como em toda matemática, é estruturada a partir de outros conceitos, anteriores e necessários, como um pré-requisito para a formação de novos conhecimentos. Por isso, neste trabalho pretende-se abordar as dificuldades de aprendizagem, diferenciando-as a partir da concepção de obstáculos, utilizando os conceitos de sistemas de conceitos e zona de desenvolvimento proximal. Uma abordagem mais específica destes conceitos em relação às dificuldades e obstáculos na aprendizagem pode trazer uma compreensão maior das causas de reprovações no Cálculo Diferencial e Integral.

O objetivo é analisar a formação dos conceitos de limites e derivadas, conceitos base estudados na primeira fase do Cálculo Diferencial e Integral, identificando nestes os conhecimentos anteriores necessários para suas formações estabelecendo assim sistemas de conceitos. A partir disto pretende-se identificar possíveis causas de dificuldades e obstáculos no aprendizado e na formação dos conceitos de limites e derivadas. Em um primeiro momento serão conceituados dificuldades e obstáculos tendo como base a teoria de Vergnaud (1989). Em seguida serão apresentadas as contribuições da teoria de Vygostsky (1998) a respeito de: sistemas de conceitos e Zona de Desenvolvimento Proximal; a partir destes se fará uma breve reflexão sobre as dificuldades e obstáculos na aprendizagem. Por fim, serão analisados exemplos de cálculos de limites e derivadas, trazidos em Anton (2000), identificando os conhecimentos necessários para suas resoluções e, a existência de um sistema de conceitos, indicando possíveis causas de dificuldades e obstáculos em suas aprendizagens. Escolhemos Anton (2000) para análise em nosso trabalho por considerarmos que este é um dos livros mais utilizados para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, presente na bibliografia básica dos planos de ensino da disciplina, em grande parte dos cursos de ensino superior em que a mesma é ministrada.

**2 METODOLOGIA**

**DIFICULDADES E OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM**

Para Vergnaud, “é possível identificar dificuldades de natureza diversa na aprendizagem da matemática e é interessante fazer uma análise detalhada das diferentes dificuldades que os alunos encontram neste processo”. O autor distingue dois tipos de dificuldades:

aquelas em que “existem saltos do pensamento, sem que esses saltos entrem violentamente em contradição com as concepções e as competências anteriormente formadas”; e outras que “formam obstáculos epistemológicos importantes e duráveis” , os quais precisam ser analisados “para mudar de concepção e compreender a relação da concepção nova a formar com a concepção anterior”. (apud GRANDO, 1995, p. 111).

De acordo com Vergnaud (apud GRANDO, 1995, p. 111), “uma dificuldade constitui-se num verdadeiro obstáculo, quando há uma concepção a superar, quando há uma contradição entre a concepção antiga a rejeitar e a concepção nova a assimilar”.

A distinção entre dificuldades e obstáculos, que dá ênfase a concepção de obstáculo, sendo um conhecimento que era pertinente em determinado contexto, porém, que em outro gera contradições e respostas erradas, da margem para que possamos interpretar e definir as dificuldades em que existem saltos do pensamento, como uma falta de conhecimentos.

**SISTEMAS DE CONCEITOS E ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL: UMA REFLEXÃO SOBRE AS DIFICULDADES E OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM**

A partir destas ideias de dificuldades e obstáculos, buscamos os sistemas de conceitos e zona de desenvolvimento proximal para entendermos possíveis causas de dificuldades e obstáculos na aprendizagem da matemática.

Segundo Vygotsky (apud, GRANDO, 2008, p. 15), “cada conceito surge relacionado com todos os restantes e uma vez formado vem a determinar, por assim dizer, seu lugar no sistema de conceitos anteriormente conhecidos”. A formação de um conceito a partir da relação deste, a um sistema de conceitos já formados, traduz por um lado as dificuldades na aprendizagem quando há falta de conhecimentos anteriores, necessários para o aprendizado de um novo conhecimento, no qual este precisa se relacionar com o anterior para que possa ser formado. O aluno então, não se apropriou de conhecimentos anteriores necessários para estabelecer uma relação com o novo conhecimento a ser formado.

Por outro lado, considerando obstáculos na aprendizagem à luz da ideia de sistemas de conceitos, são os conhecimentos anteriores atuando negativamente para a apropriação de novos conceitos, por estar sendo estabelecida uma relação errada entre os conhecimentos. A própria definição de obstáculos epistemológicos diz que estes precisam ser analisados “para mudar de concepção e compreender a relação da concepção nova a formar com a concepção anterior.”(GRANDO,1995). Fica clara a relação de conceitos nos obstáculos da aprendizagem.

Ao passo que os obstáculos não se rompem no processo de aprendizagem, se estabelece um acúmulo de obstáculos que, a partir da formação de conceitos pela relação entre conhecimentos, o conceito que o aluno não se apropriou plenamente por não ter transposto um obstáculo remanescente, se torna então mais um obstáculo na aprendizagem.

Ao não se apropriar, ou formar, plenamente um conceito em virtude de um obstáculo, este acaba se tornando um novo obstáculo para a aprendizagem. Na medida em que o aluno não compreende efetivamente um conceito por influência de um obstáculo, este não possibilita a formação de um novo conhecimento pela relação de conceitos.

Ao trabalhar conhecimentos que não possuem uma base, em um sistema de conceitos já conhecidos pelo aluno, o professor atua fora das possibilidades do mesmo, tomando a ideia de zona de desenvolvimento proximal. Segundo Vygotsky (1998, p. 112), a Zona de Desenvolvimento Proximal é a distância entre o nível de conhecimento real, que se determina pelo o que o indivíduo consegue realizar sozinho, e o nível de conhecimento potencial, determinado pelo o que o indivíduo consegue realizar com a ajuda de outro.

Considerando que o aluno não possui determinado conhecimento necessário para a formação de outro conceito, ou que este conhecimento se mostra um obstáculo na relação com o conhecimento a ser formado, a instrução se dá fora da Zona de Desenvolvimento Proximal do aluno.

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

O cálculo de acordo com Anton (2000, p. 1), “é o ramo da matemática interessado em descrever a forma precisa na qual variações em uma variável se relacionam com variações em outra.” O autor relata que “em quase todo tipo de atividade humana, encontramos dois tipos de variáveis”. Por exemplo, a aceleração de um carro e o fluxo de gasolina, a taxa de inflação de uma economia e a oferta de dinheiro, o nível de antibiótico na corrente sanguínea e a dosagem aplicada.

Segundo Anton (2000, p. 4), “o cálculo tem raízes que remontam ao trabalho do matemático grego Arquimedes, mas os princípios fundamentais do cálculo atual foram feitos independentemente por Issac Newton e por Gottfreid Leibniz”.

**LIMITES**

De acordo com Anton (2000, p. 111), “o desenvolvimento do cálculo foi estimulado por dois problemas geométricos: achar as áreas de regiões planas e as retas tangentes a curva. [...]. Esses problemas requerem um processo de limite para sua resolução”. O autor relata que “o conceito de “limite” é o alicerce sobre o qual todos os outros conceitos de cálculo estão baseados”.

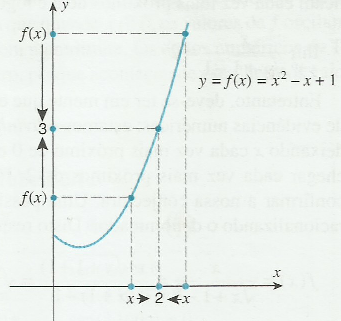
Segundo Anton (2000 p. 114), “o uso mais básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um valor.” A gênese do cálculo está baseada no conhecimento de funções. O conceito de limite no qual todo cálculo se sustenta não foge à regra. Em um sistema de conceitos o conhecimento sobre funções é a porta de entrada para a formação do conceito de limite. A gama de conceitos na qual se desdobra o conhecimento sobre funções passa pelos seus diferentes tipos, em que podemos citar: polinomiais; racionais; irracionais; trigonométricas; modulares; exponenciais; logarítmicas.

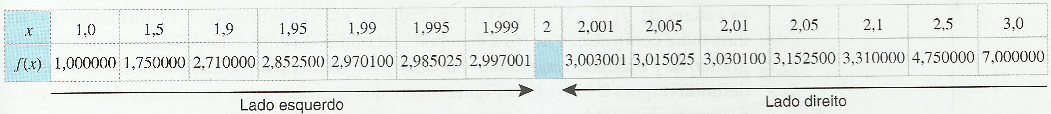
Ao iniciar a descrever o conceito de função, Anton (2000, p. 114), examina o comportamento da função

quando *x* está cada vez mais próximo de 2. O autor conclui que,

fica evidente a partir do gráfico e da tabela na figura 2.1.9 que os valores de *f* (*x*) ficam cada vez mais próximos de 3 à medida que *x* estiver cada vez mais próximo de 2, por qualquer um dos lados, esquerdo ou direito. Além do mais, ambos, gráfico e tabela, sugerem que podemos tornar os valores de *f* (*x*) tão próximos de 3 quanto quisermos, ao fazer *x* suficientemente próximo de 2. Descrevemos isto dizendo que o “limite de *x² - x +* 1 é 3 quando *x* tende a 2 por qualquer um dos lados”, e escrevemos

Observe que na análise deste limite estamos apenas preocupados com os valores de *f* próximos do ponto *x* = 2 e não com os valores de *f* em *x* = 2.





 (ANTON, 2000, p. 114-115).

A partir da interpretação numérica e do gráfico se pode concluir uma ideia geral sobre limite, em que, de acordo com Anton,

se os valores de *f* (*x*) puder ser definido tão próximo quanto quisermos de *L*, fazendo *x* tão suficiente próximos de *a* (mas não igual a *a*), então escrevemos

o qual deve ser lido como “o limite de *f* (*x*) quando *x* tende a *a* é *L*”. (2000, p. 115).

Percebe-se que para a introdução da ideia de limite, que além do conhecimento anterior sobre funções, mais especificamente neste exemplo, funções polinomiais, também se faz necessário o conhecimento referente à interpretação de gráficos. O conhecimento sobre a representação gráfica, assim como, a interpretação do gráfico desta função é quem permite a introdução da ideia de limite a partir da análise gráfica. Pode-se destacar a importância do conhecimento sobre as propriedades das funções, em que, conhecimentos sobre variáveis dependentes e independentes, domínio e imagem, são imprescindíveis para construção e análise do gráfico.

A construção da tabela que permite a visualização da ideia de limite numericamente tem como pré-requisito o conhecimento sobre funções polinomiais, além, do conhecimento neste exemplo de duas das operações fundamentais, adição e subtração, mais o conhecimento da operação de potenciação.

Em outro exemplo trazido em Anton (2000, p. 115), o autor faz uma conjectura do valor do limite

A partir da análise numérica pela construção da tabela e da análise do gráfico da função o autor conclui que à medida que *x* estiver mais próximo de 0, por qualquer um dos lados, esquerdo ou direito os valores de *f* (*x*) ficam cada vez mais próximos de 2, salientando logo no início da solução que a função não está definida em *x* = 0. Neste exemplo o autor apresenta outra maneira de confirmar essa conjectura, simplificando algebricamente a função, racionalizando o denominador.

.

Além dos conhecimentos sobre funções, mais especificamente, funções irracionais, para construção de uma tabela numérica são necessários conhecimentos sobre construção e interpretação de gráficos, se faz necessário também o conhecimento anterior sobre a impossibilidade de divisão por zero e, o conhecimento sobre racionalização de denominadores.

Encerrando a primeira parte de uma descrição geral do conceito de limite, Anton (2000, p. 116), realiza uma conjectura sobre o valor do limite

A partir da análise numérica pela construção da tabela e da análise do gráfico da função o autor conclui que à medida que *x* estiver mais próximo de 0, por qualquer um dos lados, esquerdo ou direito, os valores de *f* (*x*) ficam cada vez mais próximos de 1, salientando logo no início da solução que a função não está definida em *x* = 0.

Sendo a função dada neste exemplo uma função trigonométrica, a construção da tabela numérica, assim como a construção do gráfico da função, depende do conhecimento de conceitos trigonométricos.

As funções trigonométricas requerem conhecimento a partir dos valores em que são definidas (graus e radianos), além do conhecimento sobre as relações trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante).

**DERIVADA**

A derivada segundo Anton (2000, p. 177), “é a ferramenta matemática básica usada para calcular a taxa de variação e a inclinação de retas tangentes”. O autor afirma que, derivada se define como:

A função *f’* definida pela fórmula

É chamada de ***derivada de f em relação a x***. O domínio de *f’* consiste de todo *x* para o qual o limite existe. (2000, p. 179).

A introdução do conceito de derivada, além de todos os conhecimentos demonstrados anteriormente sobre limites, tem como pré-requisito conhecimentos anteriores sobre funções e, sobre a impossibilidade da divisão por zero. Segundo Anton, há duas interpretações da derivada.

A derivada *f’* de uma função pode ser interpretada ou como uma função cujo valor em *x* é a inclinação da reta tangente ao gráfico *y = f* (*x*) em *x,* ou, alternativamente, como uma função cujo valor em *x* é a taxa instantânea da variação de *y* em relação a *x.* (2000, p. 179).

Aplicando o conceito de derivada Anton, calcula a derivada em relação a *x* de *f* (*x*) = *x³* - *x*, como segue:

(2000, p. 180).

Para o cálculo da derivada da função *f* (*x*) = *x³ - x,* são necessários conhecimentos sobre limites, funções polinomiais e operações com expressões algébricas.

Em outro exemplo trazido em Anton, o autor calcula a derivada em relação a *x* de , a partir da definição de derivada.

(2000, p. 180)

O cálculo da derivada e a formação de seu conceito tem como pré-requisito o conhecimento sobre limite assim como todos os conceitos que o antecedem.

**3 RESULTADOS E ANÁLISE**

O conhecimento sobre funções demonstra-se básico para formação e apropriação dos conceitos iniciais do cálculo diferencial e integral de que tratamos. A falta de conhecimentos sobre cada tipo de função pode se tornar causa de dificuldades na aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, ao passo de que o aluno não possui então um conhecimento anterior necessário para a formação de um novo conceito.

O não conhecimento sobre as propriedades das funções torna praticamente impossível a construção e interpretação do gráfico da função podendo ser então causa de dificuldades na aprendizagem e formação do conceito de limite.

Para a formação do conceito de limite, com base no exemplo que trouxemos, podemos perceber que a falta de conhecimentos referentes às operações fundamentais da matemática (adição, subtração, potenciação), construção de tabelas e mais especificamente funções polinomiais, também podem ser causa de dificuldades na aprendizagem e formação do conceito de limite. A aprendizagem e formação do conceito de limite se encontra fora das possibilidades do aluno que não possua todos os conhecimentos anteriores necessários para a formação deste novo conceito. O professor atua fora da zona de desenvolvimento proximal do aluno ao não observar quais conceitos são necessários para aprendizagem e formação do conceito de limite quando o mesmo não os possui.

Em outro exemplo, além dos conhecimentos já mencionados, a falta de conhecimento anterior da impossibilidade de divisão por e de racionalização de denominadores pode também ocasionar dificuldades na aprendizagem do conceito de limite. Podemos identificar também uma causa de obstáculos na aprendizagem, pela restrição da divisão por zero. A propriedade comutativa pertencente à operação de multiplicação inversa da operação de divisão se torna fruto de obstáculos. Os erros acontecem quando o aluno usa a concepção da propriedade comutativa na operação de divisão. A definição da operação de divisão exige que o quociente seja diferente de zero. A divisão do número zero por qualquer número natural diferente de zero, resulta nele mesmo. Porém, se for aplicada a concepção da propriedade comutativa pertencente à operação de multiplicação, que a operação de divisão não possui, ocasionará em erro, pois não existe resultado para divisão por zero.

Nos casos em que são calculados limites em funções trigonométricas são necessários conhecimentos sobre os valores em que são definidas as funções, no caso, graus e radianos, além do conhecimento sobre as relações trigonométricas em seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. A falta destes conhecimentos pode ser causa de dificuldades na aprendizagem e formação do conceito de limite. Identificamos neste exemplo também, uma possível causa de obstáculo na aprendizagem, a partir da restrição da divisão por zero, já descrita anteriormente. A aprendizagem e formação do conceito de limite estão fora da zona de desenvolvimento proximal do aluno que não possui os conhecimentos anteriores necessários para formação deste novo conceito.

Podemos perceber também que para formação do conceito de derivada, em um sistema de conceitos a falta de conhecimento sobre funções pode ser causa de dificuldades na aprendizagem. No mesmo sentido a impossibilidade da divisão por zero pode ser causa de obstáculos se o aluno não possui plenamente formado o conhecimento sobre as propriedades na divisão, se tornando assim um conhecimento que atua negativamente na formação de um novo conceito.

Em um sistema de conceitos, o conhecimento sobre limite assim como todos os conceitos que o antecedem (funções e de diversos conceitos básicos da matemática como as operações fundamentais) são indispensáveis para o aprendizado do conceito de derivada. Neste sentido a falta destes conhecimentos por parte do aluno podem ser causas de dificuldades na aprendizagem do conceito de derivada. A aprendizagem e formação do conceito de derivada estão fora da zona de desenvolvimento proximal do aluno que não possui os conhecimentos anteriores necessários para formação deste novo conceito.

**4 CONCLUSÕES**

A análise da formação dos conceitos de limite e derivada, conceitos base estudados na primeira fase do Cálculo Diferencial e Integral, reforça a concepção de que este é estruturado a partir de um sistema de conceitos, que se relacionam em suas formações. Tomando as dificuldades na aprendizagem e formação dos conceitos como a falta de um conhecimento anterior necessário em uma relação destes e, reconhecendo obstáculos como um conhecimento que atua negativamente na aprendizagem e formação de um novo conceito, percebe-se que é possível identificar algumas dificuldades e obstáculos na aprendizagem e formação dos conceitos de limite e derivada, a partir da análise da relação que os mesmos possuem à conceitos anteriores em que se forma um sistema de conceitos.

O conceito de função que é a base de todo Cálculo Diferencial e Integral, pode ser responsável por dificuldades na aprendizagem dos conceitos de limite e derivada. Outro aspecto que se identifica é a impossibilidade da divisão por zero como causa de obstáculos na aprendizagem e formação de conceitos

De maneira geral podemos dizer que diversos conceitos da matemática básica, influenciam na formação dos conceitos de limite e derivada, podendo ser causa de dificuldades e obstáculos, limitando as possibilidades do aluno para a aprendizagem de conceitos que por esses motivos se encontram fora de sua Zona de Desenvolvimento Proximal.

Os resultados da análise feita neste trabalho mostram a necessidade de o professor realizar avaliações diagnósticas e formativas a fim de verificar em que nível seu aluno se encontra em relação à formação de conceitos e, a partir disso, recuperar os conceitos necessários para que possa ir adiante e trabalhar dentro das possibilidades do mesmo, ou seja, dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal do aluno, respeitando o tempo, as condições e as limitações de cada aluno.

A análise da formação de outros conceitos do Cálculo Diferencial e Integral pode ser relevante a fim de identificar causas de dificuldades e obstáculos na aprendizagem e formação de conceitos da matemática.

**5 REFERÊNCIAS**

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. 6.ed. Porto Alegre: Bookman, V.1, 2000.

GRANDO, Neiva Ignês. **Dificuldades e obstáculos em educação matemática**. *Espaço Pedagógico*. Passo Fundo: UPF. Faculdade de Educação, n. 1, v. 2, 1995. p. 109-122.

GRANDO, Neiva Ignês; MARASINI, Sandra Mara. ***Educação Matemática***: a sala de aula como espaço de pesquisa. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2008.

VIGOTSKY, Lev Semenovich. ***A Formação Social da Mente***: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.