

EXPRESSÕES NUMÉRICAS COMO SUPORTE PARA O ESTUDO DE PADRÕES: LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO RECURSIVO EM TEXTOS ACADÊMICOS

NUMERIC EXPRESSIONS AS A SUPPORT FOR THE STUDY OF PATTERNS: RECURSIVE BIBLIOGRAPHIC SURVEY IN ACADEMIC PAPERS

Rita de Cássia de Souza Soares Ramos¹, João Alberto da Silva²

Recebido: agosto/2022 Aprovado: janeiro/2024

Resumo: O trabalho com expressões numéricas não se resume ao estudo das quatro operações, pois está conectado com outros temas. Estudos sobre o pensamento algébrico e a generalização, escrita inicial de relações em geometria, sobre a linguagem matemática e sobre a identidade do professor se entrelaçam às expressões numéricas. Esta pesquisa teve por objetivo identificar como as expressões numéricas se movimentam em teses, dissertações, textos acadêmicos e artigos que mencionassem as expressões numéricas. Para tal, foi realizado um levantamento em cinco fases, no período de 2000 a 2020 em repositórios e portais de textos acadêmicos. O suporte dado pelas expressões numéricas a pesquisas de outros temas é objeto deste texto, cujo tratamento resultou em cinco categorias: generalização em sentido de número, linguagem, geometria, pensamento algébrico e característica do professor. Conclui-se que as expressões servem como suporte à representação de situações em diferentes áreas da Matemática, e da necessidade de trabalhar expressões numéricas a partir de problemas, representá-los na forma de escrita matemática e construir os significados tanto das regras de prevalência quanto dos sentidos das operações a partir destas situações.

Palavras-chave: Levantamento bibliográfico, expressões numéricas, Educação Matemática.

Abstract: Working with numerical expressions is not limited to the study of the four operations, as it is connected with other topics. Studies on algebraic thinking and generalization, initial writing of relationships in geometry, on mathematical language and on the teacher's identity are intertwined with numerical expressions. This research aimed to identify how numerical expressions move in theses, dissertations, papers and articles that mention numerical expressions. To this end, a survey was carried out in five phases, from 2000 to 2020 in repositories and portals of academic papers. The support given by numerical expressions to research on other topics is the object of this paper, whose treatment resulted in five categories: generalization in the sense of number, language, geometry, algebraic thinking and teacher characteristics. It is concluded that the expressions serve as a support to the representation of situations in different areas of Mathematics, and the need to work numerical expressions from problems, represent them in the form of mathematical writing and build the meanings of both the prevalence rules and the meanings of operations from these situations.

Keywords: Bibliographic survey, numerical expressions, Mathematics Education.

1. Introdução

Expressões numéricas são possíveis representações de problemas matemáticos. Uma situação problema pode pertencer a diversos campos conceituais, mas necessariamente sua escrita na forma algébrica, como expressão numérica, será composta por Estruturas Aditivas ou

¹  <https://orcid.org/0000-0002-7842-4300> - Doutora em Ensino de Ciências (FURG). Professora do Departamento de Educação Matemática (UFPEL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. Avenida Gomes Carneiro, 01, sala 309, Laboratório Multilinguagens, Campus Anglo, Bairro Porto, CEP 9610-000, Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: rita.amos@ufpel.edu.br

²  <http://orcid.org/0000-0002-5259-7748> - Pós-doutorado em Educação Matemática (UFPE), Doutor em Educação (UFRGS). Professor associado na Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil. Avenida Itália km 8, Campus Carreiros, Cidade do Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil, CEP 96203-900. joaosilva@furg.br

Multiplicativas. A escrita na forma algébrica envolve a síntese das operações, no sentido de compreender o ordenamento das operações, e a resolução de uma expressão numérica envolve a compreensão das estruturas e propriedades inerentes à Matemática do Ensino Fundamental (OTTES; FAJARDO, 2017). Este texto é parte de uma revisão sistemática sobre expressões numéricas, durante o período de 2000 a 2020. As categorias resultantes desta revisão foram trabalhos cujo tema eram as expressões numéricas, trabalhos de aplicação das expressões numéricas em intervenções de sala de aula e por último trabalhos que mencionassem as expressões numéricas interligadas com outros campos conceituais. Para a última categoria mencionada, os tópicos mais relevantes foram o uso de expressões numéricas como representação matemática nos diversos campos do conhecimento, bem como sua importância como linguagem matemática escrita e como descrição de padrões em diversas áreas da Matemática. A riqueza do uso desta representação bem como as formas com as quais ela é estudada está expressa neste texto. Este trabalho teve por objetivo identificar como as expressões numéricas se movimentam em teses, dissertações, textos acadêmicos e artigos que mencionassem as expressões numéricas.

A escrita de uma expressão numérica segue uma ordem específica, cujas operações e sinais de associação permitem representar um problema em linguagem algébrica (VERGNAUD, 2009). Assim, as características de organização e estratégias de resolução de expressões numéricas envolvem as propriedades elementares das operações matemáticas e possibilitam que sejam a expressão de problemas que envolvem outros Campos Conceituais, que não apenas o das Estruturas Aditivas e das Estruturas Multiplicativas, indo além da área da Aritmética.

O estudo das expressões numéricas não está descrito de forma evidente nos programas de currículo obrigatórios, no entanto, resolução de problemas e escrita em linguagem matemática fazem parte destes documentos (OTTES; FAJARDO, 2017). Este texto aborda exemplos de como as expressões numéricas são trabalhadas como suporte ao estudo do sentido de número e operações, a representações geométricas e à construção do pensamento algébrico, bem como ao estudo da linguagem matemática e de crenças sobre a atividade do professor de Matemática.

O sentido de número remete aos diversos significados que os números podem assumir no cotidiano, à compreensão sobre sequência numérica e à magnitude relativa dos números. Os sentidos das operações remetem à compreensão de suas propriedades e ordenamentos, bem como às aproximações e rupturas entre os campos conceituais aos quais elas pertencem (VERGNAUD, 2009, SILVA; SPINILLO; SENA, 2016).

2. Metodologia

Esta pesquisa é uma investigação de natureza qualitativa e caráter descritivo, que objetiva analisar como textos acadêmicos brasileiros retratam as expressões numéricas, mediante pesquisa bibliográfica, a fim de organizar um panorama sobre a pesquisa e disseminação textual de expressões numéricas (GIL, 2002). O período da busca compreende entre os 2000 e 2020, a fim de compreender as movimentações históricas do ensino de expressões numéricas. Os

descritores utilizados para a busca foram: “expressão numérica”, “expressões numéricas”, “expressão aritmética”, “expressões aritméticas”.

Trata de um estudo de revisão produzido em cinco fases, a partir das seguintes buscas, com revisão sistemática de literatura do tipo meta-síntese, a qual revisa pesquisa qualitativa (GALVÃO; RICARTE, 2020). A primeira e a segunda fases representam uma busca nos mesmos portais, mas de formas diferenciadas, sendo a primeira geral e a segunda recursiva. A terceira, a quarta e a quinta fases são distintas entre si:

1) Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), nos quais a busca a partir das ferramentas dos portais foi utilizada;

2) levantamento das referências presentes nos capítulos teóricos de teses e dissertações cujo objeto de estudo foram as expressões numéricas;

3) textos nos eventos ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática e SIPEM – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, nos quais foi utilizada a ferramenta Ctrl+F ou leitura de sumário nos anais, conforme os textos apresentaram possibilidade, sendo realizada leitura completa nos demais;

4) artigos nos periódicos de Qualis A1 e A2 da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), de Educação Matemática, escolhidos pela sua relevância na área, onde foi utilizada a busca no sumário de cada periódico, e por último,

5) portais de pesquisa de periódicos: Edubase, Scielo e Portal de Periódicos da CAPES, nos quais foi utilizada a busca automatizada.

A fase 1) consistiu em duas etapas: em 1a) constituiu-se um corpus a partir de teses e dissertações, dos quais 22 trabalhos foram selecionados por ligarem-se ao tema e estarem inseridos na Educação Matemática. Em 1b) os 22 foram classificados conforme a ênfase dada às expressões numéricas: (i) 7 tiveram como objeto de pesquisa, especificamente, as expressões numéricas, (ii) 11 utilizaram de alguma forma em suas metodologias ou instrumentos as expressões numéricas e (iii) 4 mencionaram expressões numéricas ao falar de outros temas, como expressões algébricas, por exemplo.

A fase 2 de constituição do corpus foi elaborada a partir de um movimento recursivo. Identificou-se quais referências sustentaram os capítulos sobre expressões numéricas dos 7 textos acadêmicos que tinham como objeto de investigação especificamente as expressões numéricas e que foram identificados na fase 1b (i). Para tal, foram lidos os capítulos de referencial teórico e identificados os textos que foram referenciados. Nessa fase foram encontradas 41 referências que fundamentaram os trabalhos. Dessas, identificou-se que 23 referências relacionavam-se a outros temas ou textos que não envolviam expressões numéricas e, por isso, foram descartadas. Restaram 18 textos relacionados, dentre os quais nove eram dissertações e teses já levantadas na fase 1, acrescidos de outros nove textos inéditos. Assim, essa fase 2 produziu a incorporação de mais 9 textos ao corpus de análise, que acrescidos às 22 dissertações e teses resultaram, até este momento da pesquisa, em 31 textos. Em um esforço de aprofundamento, foi realizado mais um movimento recursivo: o levantamento das

referências presentes nestes nove textos desta fase. Nessa busca não se encontraram novas referências, mantendo-se o número total de textos em 31.

A Figura 1 apresenta um esquema de rede dos 18 trabalhos selecionados na fase 2, cuja seta indica o vínculo de citação.

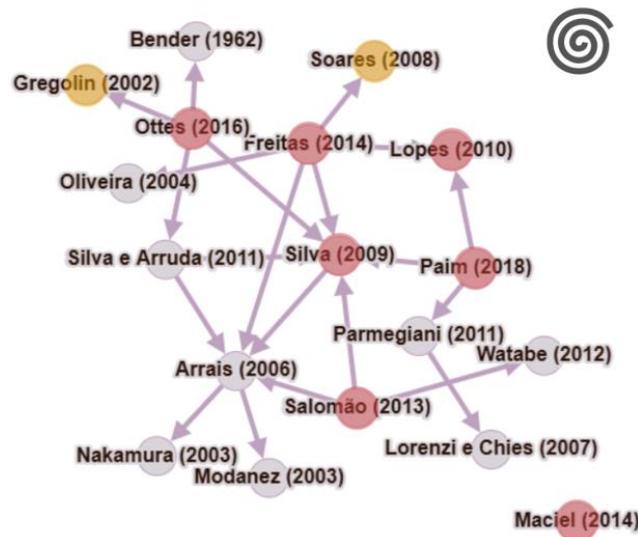


Figura 1 – Rede de trabalhos vinculados às pesquisas sobre expressões numéricas. (Fonte: os autores)

Esta figura evidencia as sete dissertações e teses que tiveram por objeto de estudo as expressões numéricas. As demais referências que se vinculam são nove textos inéditos e duas dissertações/teses, destacadas em amarelo, que surgiram na fase 1, mas cujo objeto de investigação não debruçava-se sobre o tema das expressões numéricas. Assim, entende-se que esse corpus constitui-se como a rede de referência para teses e dissertações sobre expressões numéricas no período de 2000 a 2020.

Na fase 3 da pesquisa foram analisados os anais dos eventos ENEM e SIPEM, resultando em sete trabalhos, compondo, assim, 38 trabalhos. Na fase 4 foram analisados 22 periódicos, encontrando três artigos, perfazendo uma frequência parcial com as fases anteriores de 41 trabalhos sobre expressões numéricas.

A busca ocorrida na fase 5 no Portal de Periódicos da CAPES resultou em 34 artigos, sendo 27 de Educação Matemática, desses, 15 abordaram expressões numéricas. Em virtude de um dos artigos já fazer parte do corpus pela fase 4, não foi contado na fase 5, a qual resultou em 14 trabalhos. Na Tabela 1 há a síntese quantitativa deste processo, o qual finalizou em 55 textos.

Tabela 1 - Textos por fase na constituição do corpus do estudo de revisão.

Fase	Descrição	Textos
1	Teses e Dissertações	22
2	Referências de Teses e Dissertações	9
3	Eventos	7
4	Periódicos de Educação Matemática segundo Fuchs (2012)	3

5	Portais de Periódicos	14
Total		55

Fonte: Os autores.

Estes textos foram lidos em sua totalidade e categorizados segundo o sentido atribuído às expressões numéricas, às ações referentes ao ensino ou à aprendizagem ou ainda às aproximações com outros conceitos e campos conceituais, mediante a Análise de Discurso (BARDIN, 1977). Deste universo de 55 textos, 21 deles referiam-se a expressões numéricas relacionadas a trabalhos sobre sentido de operações ou geometria, ou nos quais a discussão sobre expressões numéricas é parte da argumentação de outros assuntos, conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Relação de trabalhos que mencionam expressões numéricas por fase da pesquisa, tipo e ano.

Fase	Tipo de trabalho	Autor
A	Dissertação	Kruzielski (2005)
A	Dissertação	Modanez (2003)
A	Dissertação	Nakamura (2003)
A	Dissertação	Oliveira (2004)
A	Dissertação	Soares (2018)
A	Dissertação	Watabe (2012)
A	Tese	Freire (2011)
A	Tese	Gregolin (2002)
A	Tese	Marcilese (2011)
A	Tese	Montenegro (2018)
C	Zetetiké	Barbosa; Magina (2014)
D	Bolema	Cebóla; Brocardo (2019)
D	Bolema	Silva (2014)
D	Dissertação	Santiago (2011)
D	Educação e realidade	Montenegro; Borba; Bittar (2020)
D	Educação Matemática Pesquisa	Santos; Pereira; Nunes (2017)
D	Educação Matemática Pesquisa	Vieira; Rios; Vasconcelos (2020)
D	Interacções	Mestre; Oliveira (2012)
D	Revista da UIIPS – Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém	Almeida; Branco (2018)
D	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	Fernandes; Correia; Guzmán (2010)
D	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	Rocha; Menino (2009)

Os demais 34 textos serão discutidos em outra publicação que está em preparação, e que utilizam a mesma metodologia.

3. Resultados e discussão

Apresentam-se aqui estudos que se referem às expressões numéricas como resultado de generalização de padrões geométricos, expressão do sentido de número nas quatro operações, representação linguística da Matemática, padronização vinculada ao pensamento algébrico, bem como caracterizadora da imagem do professor de Matemática.

3.1 Estudos que utilizam expressões numéricas: generalização de padrões e sentido de Número e Operações

Tanto o sentido de número nas quatro operações quanto no caso específico da multiplicação é discutido neste item. As expressões numéricas são co-protagonistas destes estudos, pois sintetizam as quatro operações.

A discussão sobre aulas de Matemática produzida por Gregolin (2002) tem como tema as quatro operações no segundo ciclo das séries iniciais do Ensino Fundamental, e versa sobre os sistemas de numeração, o que segundo o autor “possibilita e contextualiza as [discussões] que seguem, sobre operações e expressões com números naturais e sentenças matemáticas” (p. 23). Trata-se de um estudo de caso, realizado com alunos de duas turmas, sendo uma turma de terceira e outra de quarta série, no qual o pesquisador acompanha as aulas de Matemática, sobre quatro operações, tendo enfoque analítico no conteúdo trabalhado. Para cada aula, Gregolin (2002) problematiza as abordagens dadas aos conteúdos, sugerindo estratégias e aprofundamentos conceituais sobre a Matemática utilizada, respeitando o nível de ensino.

O autor classifica a análise das expressões numéricas e das sentenças matemáticas como complementos sobre operações, sendo o exame das expressões numéricas dado mediante a observação das aulas, comparação com os livros didáticos adotados, apreciação dos cadernos dos alunos e conversa com as professoras. Inicia com a apresentação de expressões segundo o caderno de um aluno da terceira série, com regras de prevalência e sem sinais de associação, como segue:

Expressão numérica é toda expressão que envolve uma ou mais operações com números. A expressão numérica representa uma única ideia de quantidade, isto é, tem um único resultado e, para obtê-lo, devemos proceder da seguinte forma: Primeiramente, efetuamos as multiplicações e divisões, obedecendo à ordem em que aparecem. A seguir, efetuamos as adições e subtrações, também obedecendo à ordem em que aparecem (caderno de um aluno em GREGOLIN, 2002, p. 120).

Os sinais de associação não aparecem na definição, mas foram utilizados pela professora da classe ao organizar uma expressão em sua forma simbólica (não como parte das expressões, apenas como separador).

Para as quartas séries acompanhadas pelo autor, as expressões numéricas foram separadas por operação: primeiro apenas as de adição e subtração, depois as de multiplicação e posteriormente de divisão. As resoluções chamaram-se simplificações, o que foi

problematizado, pois uma simplificação pode levar a uma expressão mais curta, não necessariamente ao resultado composto por apenas um numeral. O conteúdo foi trabalhado com definição, exemplo e exercícios, nesta ordem. Para as expressões contendo apenas adições e subtrações o autor propõe regras que expressam o pensamento de alguns estudantes, conforme suas resoluções:

1. Sempre é válida a ordem de resolução da esquerda para a direita;
2. Pode-se iniciar resolvendo as subtrações isoladas, com minuendo maior que o subtraendo (subtrações podem ser entendidas como adições de opostos);
3. Subtrações consecutivas devem ser resolvidas da esquerda para a direita (para não se trabalhar com números negativos);
4. Nenhum subtraendo pode ser adicionado (a subtração será efetuada antes) (GREGOLIN, 2002, p. 125).

O autor propõe uma discussão a respeito da ordem dos sinais de associação, a respeito da escrita de uma expressão cujos colchetes são internos aos parênteses e a impossibilidade da resolução de tal expressão respeitando-se a regra anterior. A solução proposta para o problema, e utilizada em recursos de informática, como programas de computador e calculadoras científicas é usar parênteses quantas vezes forem necessárias.

Oliveira (2004) estuda a produção de relações numéricas realizadas por alunos de uma turma de quarta série do Ensino Fundamental. A partir de problemas cujo tema é o estudo de formas geométricas retangulares, a autora realiza atividades que promovem a produção de sentido das operações de adição e multiplicação, a ideia de linearidade e bilinearidade, configuração retangular e arranjo, culminando na escrita e resolução de expressões numéricas. A autora busca “entender as relações aritméticas que podem ser produzidas com o auxílio do aspecto intuitivo da geometria; como se mobilizou a contagem, a noção de unidade e a quantificação, chegando a produção de expressões numéricas” (OLIVEIRA, 2004, p. 41). Para tal, a autora organiza uma sequência de doze atividades sobre área e perímetro, das quais as três últimas versam sobre expressões numéricas.

As atividades propostas por Oliveira (2004) procuram dar sentido à multiplicação como configuração retangular, por meio de atividades com papel quadriculado, composição e decomposição de figuras geométricas. A autora solicita que os estudantes escrevam expressões numéricas que traduzam as operações realizadas nas atividades.

Em uma das atividades específicas sobre expressões numéricas, solicita-se que os alunos construam retângulos a partir de dois retângulos de valores diferentes, primeiramente solicitando a formação de uma figura: “a) forme uma figura utilizando dois retângulos um de lados medindo 5cm e 10cm e outro cujos lados medem 10cm e 3cm. Qual a área desse novo retângulo formado?” (OLIVEIRA, 2004, p. 55), e após, pedindo-se que indique uma expressão que resulte em uma figura de área dada: “d) solicita-se agora que oralmente represente um retângulo com área 56 cm² por outros dois retângulos” (OLIVEIRA, 2004, p. 55). Segundo a autora, esta atividade proporcionou a oralização de expressões numéricas e a intuição dos alunos sobre a soma de dois retângulos formar expressões numéricas (2004, p. 86).

Nas atividades posteriores, solicitou-se oralmente a partir da composição de dois retângulos, a representação numérica do retângulo resultante, sem o uso de recurso auxiliar,

até que se esgotassem as possibilidades; a representação oral de expressões numéricas que resultassem em um número dado, com livre critério de formulação; e por último a exposição de expressões numéricas envolvendo adição e multiplicação e a solução apresentada oralmente pelos alunos para as mesmas. Oliveira (2004, p. 87) conclui que os alunos apropriaram-se do conceito de área para construir a multiplicação e as juntaram (adicionaram) em uma relação de parte-todo, dando significado às expressões numéricas.

Santiago (2011) aborda a resolução de problemas, com enfoque piagetiano. A autora organiza uma pesquisa experimental com 15 participantes de cada série escolar, de terceira a sexta séries, cujo objetivo foi “investigar o pensamento matemático desses alunos, quanto à realização de operações aditivas simples e de interpretações individuais de resolução de problemas e de problemas não formulados” (SANTIAGO, 2011, p. 42). A coleta foi realizada por meio da solicitação de criação de situações problema a partir de diferentes expressões numéricas contendo operações aditivas, pensando sobre a incógnita. De cada um dos 15 participantes de cada série, um foi sorteado para realizar as provas piagetianas de conservação, classificação e seriação, para diagnóstico do nível de desenvolvimento mental em que eles se encontravam.

Santiago (2011) nomeou as categorias de Busquets, de acordo com a presença da incógnita na situação criada, tendo como variáveis a indiferenciação, a simples descrição, a inversão de dados, as diferentes tentativas de aproximação, a formulação em contexto e a formulação correta. A autora classificou as respostas coletadas quanto à escrita das situações, segundo as categorias de Busquets e segundo os verbos apresentados nas redações das situações, concluindo que a maior parte dos sujeitos formulou problemas de menor grau de complexidade e de maior facilidade lógico-matemática, com uso correto das estruturas cognitivas e das leis que as regem. Ocorreram dificuldades do sistema simbólico verbal, de ordem linguística, no que toca à transcrição de significados e suportes das operações matemáticas. A autora sugere que a estratégia de resolução de problemas não deve somente disponibilizar situações com os passos já formulados por meio da linguagem escrita, com modelos estereotipados e aplicação mecânica de técnicas, mas em aritmética, sim levar os estudantes a formular perguntas contextualizadas.

Watabe (2012) estuda as dificuldades de 26 estudantes de uma quarta série ao resolver situações problema com as quatro operações. Para tal, a autora se sustenta na Teoria dos Campos Conceituais, e cria situações para as estruturas aditiva e multiplicativa. Estuda as competências linguísticas e matemáticas, a partir de instrumento contendo problemas aditivos e multiplicativos, contemplando as classes organizadas por Vergnaud. A autora analisou as resoluções dos estudantes, tanto na compreensão matemática quanto em sintaxe e semântica. Concluiu que o esquema evocado pelos alunos para a resolução de problemas propostos foi o algoritmo convencional, e que as palavras-chave não tiveram grande influência na escolha das operações, também que o entendimento de enunciados é influenciado por estratégias de leitura (WATABE, 2012).

Rocha e Menino (2009) estudam o desenvolvimento do sentido de número na multiplicação, em crianças de 7 e 8 anos, com base em um estudo de caso. Mediante a resolução

de problemas de multiplicação, em tarefas propostas em conjunto com a professora, trabalham a multiplicação como disposição retangular, com objetos discretos e contínuos. A organização das tarefas pelo professor é caracterizada pelos autores como fator crucial, pois podem influenciar o desenvolvimento e o uso de estratégias flexíveis de cálculo, a reflexão sobre as ideias matemáticas e evitar uma introdução prematura aos algoritmos formais, possibilitando a aquisição de conhecimentos necessários para operar ao nível da abstração. Nos primeiros anos o trabalho precoce com algoritmos faz as crianças perderem a noção de ordem de grandeza, pensando nos números por coluna, e que ainda que os algoritmos sejam importantes, não devem ser trabalhados de uma forma pronta.

A respeito do sentido de número e da multiplicação, a abordagem didática deve estar atrelada tanto à intencionalidade dos contextos, os quais devem ser desafiadores e favoráveis à exploração dos conteúdos matemáticos, quanto à progressão de níveis. Os contextos podem envolver três tipos de estruturas: lineares, de grupo e retangulares. Além dos contextos, os autores afirmam que a progressão de níveis de cálculo na multiplicação se dá do cálculo por contagem (repetição de adições), para o cálculo estruturado (ideia de quantas vezes) e por último para o cálculo formal (produto entre dois números recorrendo a produtos conhecidos, propriedades da operação e relações numéricas).

Diante da necessidade de trabalhar os contextos e a progressão de níveis na multiplicação, Rocha e Menino (2009) propuseram uma intervenção em uma turma de segundo ano, em Portugal, na qual trabalharam um conjunto de tarefas referentes a disposição retangular. Os problemas versaram sobre a ideia de multiplicação e sua representação, trabalhando as propriedades aritméticas, a adição como parcelas iguais e diferentes representações para problemas multiplicativos provenientes de disposição retangular. Os problemas tratavam também da adição de ladrilhos para pavimentação de um pátio, resultando em expressões numéricas contendo adição, multiplicação e sinais de associação, como ilustrado na Figura 2.

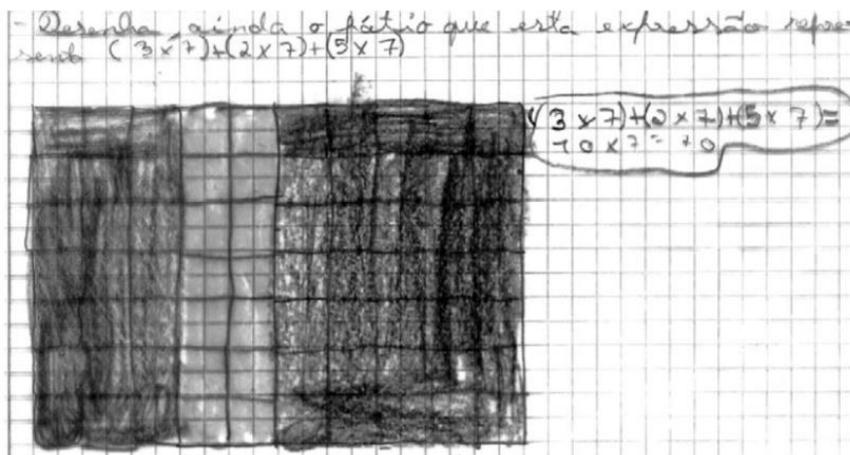


Figura 2 – Resposta dada a uma tarefa de disposição retangular. (Fonte: Rocha e Menino, 2009, p. 129)

O contexto da tarefa permitiu trabalhar as propriedades aritméticas das operações, as relações entre os números e o cálculo e a visualização espacial. Os autores concluem que a estrutura retangular, associada ao contexto das tarefas facilitou estratégias múltiplas, partindo

da compreensão das propriedades aritméticas e desenvolvendo apetência para representações eficazes.

Fernandes, Correia e Guzmán (2010) propõem uma série de tarefas de combinatória na forma de problemas a estudantes do décimo segundo ano de uma escola de Portugal. Para cada conjunto de tarefas, os estudantes deveriam realizar as resoluções, e depois de entregá-las, recebiam o resultado correto e deveriam refazer, explicitando o desenvolvimento da resolução. Os resultados indicam que os maiores erros encontrados estiveram nas representações de expressões numéricas, no entanto, houve evolução na resolução através da percepção do próprio erro, mediante análise das mesmas. Os autores concluem que existe a necessidade de solicitar aos alunos que explicitem seus raciocínios, bem como a vantagem da intervenção na forma de problemas, cujas resoluções dos alunos evidenciam que trabalhar o raciocínio combinatório e as conexões entre as operações combinatórias, em detrimento da centralização nas fórmulas gera melhores resultados.

Barbosa e Magina (2014) analisaram, a partir da Teoria dos Campos Conceituais, como 22 estudantes de 6º ano resolvem situações no jogo de mensagem, utilizando diferentes estratégias relacionadas às expressões numéricas. O jogo, que consistia em identificar as multiplicações representadas em cartões, foi aplicado em dois encontros. As expressões numéricas eram multiplicativas, com três fatores, provenientes das representações das imagens nos cartões. Cada agrupamento dos cartões indicava um tipo de multiplicação, ainda que a escrita fosse a mesma, a ordem das operações vinha de representações diferenciadas, como na figura 3, na qual (1) representa $2 \times 2 \times 3$ e (5) representa $2 \times 3 \times 4$, por exemplo.

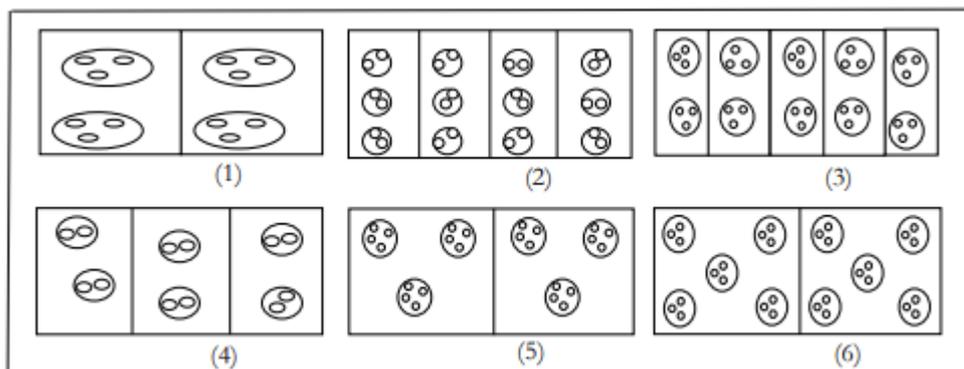


Figura 3 – cartões do Jogo Mensagem. (Fonte: Barbosa;Magina, 2014, p. 18).

Mediante análise das jogadas e dos registros dos alunos, as autoras descreveram os “os esquemas mobilizados pelos alunos no jogo e os conhecimentos em ação que compõem tais esquemas” (BARBOSA; MAGINA, 2014, p. 16), encontrando como resultado que os alunos decifram a mensagem com procedimento de contagem um a um, contagem das bolinhas de cada círculo (adição repetida), contagem das bolinhas de cada círculo e sua multiplicação pelo total de círculos, contagem do total de bolinhas de cada “pedaço”, contagem das bolinhas de um pedaço e sua multiplicação pelo total de pedaços, concluindo que tais representações possibilitaram aos alunos a mobilização de esquemas úteis à decomposição de um número em fatores primos, bem como a compreensão de que “embora a multiplicação seja uma operação

comutativa, alterações na ordem dos fatores podem implicar na representação de situações distintas” (BARBOSA; MAGINA, 2014, p. 9).

Montenegro (2018) analisou, a partir da Teoria de Registros de Representação Semiótica (Duval, 2005), situações de combinatória, utilizando invariantes prescritivos e invariantes em ação sendo que o conhecimento sobre a identificação de conversões a língua natural (registro de partida) gera a árvore de possibilidades e a listagem, esta que resulta em expressão numérica (registro de chegada). Montenegro (2018) analisa expressões numéricas resultantes de situações provenientes de relações ternárias de eixo combinatório, buscando discutir o uso de diferentes registros de representação, tais como linguagem natural, listagens, árvore de possibilidades e expressões numéricas – com as de aplicação do Princípio Fundamental da Contagem – na ampliação do conhecimento combinatório; sendo que os invariantes (relações constituintes das situações) estão relacionados à escolha e ordenação dos elementos, ou seja, quais escolhas devem ser realizadas na formação e contagem dos casos válidos e se nessas escolhas a ordem gera novas possibilidades.

O estudo de Montenegro (2018) buscou entender a conversão a) de linguagem natural para árvore ou listagem e b) de árvore ou listagem para expressões numéricas,, e teve como resultado que “identificar uma identificar a expressão numérica que responde uma dada situação combinatória é uma tarefa muito difícil para os estudantes de anos iniciais” (MONTENEGRO, 2018, p.111). Tais conversões para expressões numéricas em combinatória não são corriqueiras nos anos iniciais, sendo mais comuns as de produto cartesiano.

Não é comum trabalhar com situações de conversão para expressões numéricas em combinatória nos anos iniciais, sendo mais comum situações de produto cartesiano, mesmo quando estudantes estão com 14 ou 15 anos, e realizam resoluções sistemáticas pelo método exaustivo, eles não formulam de forma explícita expressões numéricas para resolução de problemas combinatórios, no entanto, Montenegro (2018) afirma que estudantes de faixa etária de 10 anos podem compreender situações combinatórias, desenvolvendo o aspecto multiplicativo das mesmas.

A autora identificou que no caso das crianças dos anos iniciais, as conversões para expressões numéricas não ocorrem de forma simples, e as originárias de problemas de combinatória requerem atenção por não poderem ser consideradas triviais ou transparentes, sendo que situações de produto cartesiano não encontraram resistência igual em sua justificativa, assim, como em situações de arranjo e combinação foi identificado um número menor de justificativas corretas, a autora sugere ser “necessário considerar as distintas situações quando se trata de conversões dentro da Combinatória” (MONTENEGRO, 2018, p. 212).

Montenegro, Borba e Bittar (2020) analisam identificação, conversão e tratamento de registros em situações combinatórias, a partir da Teoria dos Campos Conceituais e da Teoria dos Registros das Representações Semióticas, enfocando a conversão para as expressões numéricas, e a necessidade de representações intermediárias (árvore de possibilidades ou listagem sistematizada) entre os registros em língua natural e em expressões numéricas.

A pesquisa foi realizada em duas etapas, sendo a primeira uma sondagem com estudantes de quinto ano e a segunda uma intervenção com o uso de representações intermediárias na conversão e no tratamento de registros realizados, com alunos de quinto, sétimo e nono anos, de modo que esses percebessem o caráter multiplicativo na solução de problemas de Combinatória.

Os resultados mostram que para o primeiro estudo as maiores dificuldades estiveram nos problemas com situação de combinação e na conversão para expressão numérica correspondente. O segundo estudo apresentou vantagens na utilização das representações intermediárias, tanto para o levantamento de possibilidades quanto para a expressão numérica. Conclui-se que com base na Teoria dos Campos Conceituais e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, “um registro de representação intermediário, transparente e sistematizado, é recomendável para auxiliar os alunos na interpretação e representação de expressões numéricas dos problemas que envolvem variadas situações combinatórias” (2020, p. 23).

Cebola e Brocardo (2019) analisam as estratégias e representações de um estudante de sexto ano (11 anos) a respeito de problemas de comparação multiplicativa. Apresentam a comparação multiplicativa como vertente da proporcionalidade, alicerçada na construção dos conceitos de fator multiplicativo, razão e proporção. As autoras afirmam que as estruturas multiplicativas, procedem as estruturas aditivas e surgem da necessidade de resolver problemas que essas não dão respostas, relacionando os conceitos de fração, razão, proporção, rate (taxa), decimal e percentagem.

As resoluções de tarefas de comparação multiplicativa geraram expressões numéricas que foram escritas na intervenção realizada por Cebola e Brocardo (2019), ao apresentarem o cálculo de diferentes multiplicações de mesmo resultado, feito pelo aluno investigado, no qual o estudante escreve e resolve diferentes expressões numéricas utilizando as propriedades aritméticas.

3.2 Linguagem e Expressões Numéricas

Kruzielski (2005) busca correlacionar o desempenho de alunos de sexta série na resolução de exercícios aritméticos com o desempenho em tarefas envolvendo memória de trabalho. O autor utiliza as expressões numéricas como parte do teste padronizado de desempenho escolar, denominado Teste de Desempenho Escolar (TDE), envolvendo as quatro operações, potenciação, frações e expressões numéricas.

O teste foi aplicado a 280 estudantes de 10 turmas de sextas séries do Ensino Fundamental de 3 escolas participantes da pesquisa. A análise quantitativa da pesquisa de Kruzielski (2005) encontrou correlação entre o desempenho na resolução de exercícios aritméticos e o desempenho em tarefas envolvendo memória de trabalho, principalmente ao envolver a Capacidade de Coordenação e informações numéricas.

Marcilese (2011) estuda como habilidades superiores (representação, recursividade e cognição numérica) se relacionam com a capacidade de qualquer criança sem impedimentos de

ordem neurológica ou social adquirir uma língua. Para tal, a pesquisadora organiza teoricamente de um ponto de vista linguístico a noção de numerosidade e numeral.

Marcilese (2011) analisa quantitativamente dois conjuntos de experimentos: i) contendo cinco experimentos aplicados em crianças com idade de dois a seis anos, tendo um grupo de adultos como controle, e ii) para verificar se existia *priming* de estruturas recursivas entre o domínio matemático e linguístico, cujo público foi composto por adultos, e mais a verificação de adultos com caso de afasia para os conjuntos de experimentos. O primeiro conjunto de experimentos visava “avaliar a possibilidade de a língua ser responsável por fornecer representações para numerosidades exatas” (p. 94), obtendo como resultados que crianças a partir dos dois anos de idade tratam numerais e quantificadores de modo diferenciado. Numerais parecem ser associados desde cedo a quantidades exatas, mesmo em fases que a criança ainda não aprendeu o valor cardinal associado a cada elemento, estruturas recursivas trazem a integração de domínios diversos e que não há correlação forte entre o *center embedding* das expressões numéricas e das sentenças linguísticas

A autora afirma que matemática e língua natural, no nível neural, são processadas de forma diferenciada, envolvem recursos compartilhados, como a memória verbal de trabalho, assim, pode ser traçado um paralelo entre algumas sentenças linguísticas e expressões numéricas, em uma correlação envolvendo *center embedding* (encaixamento no centro), como na Figura 4.

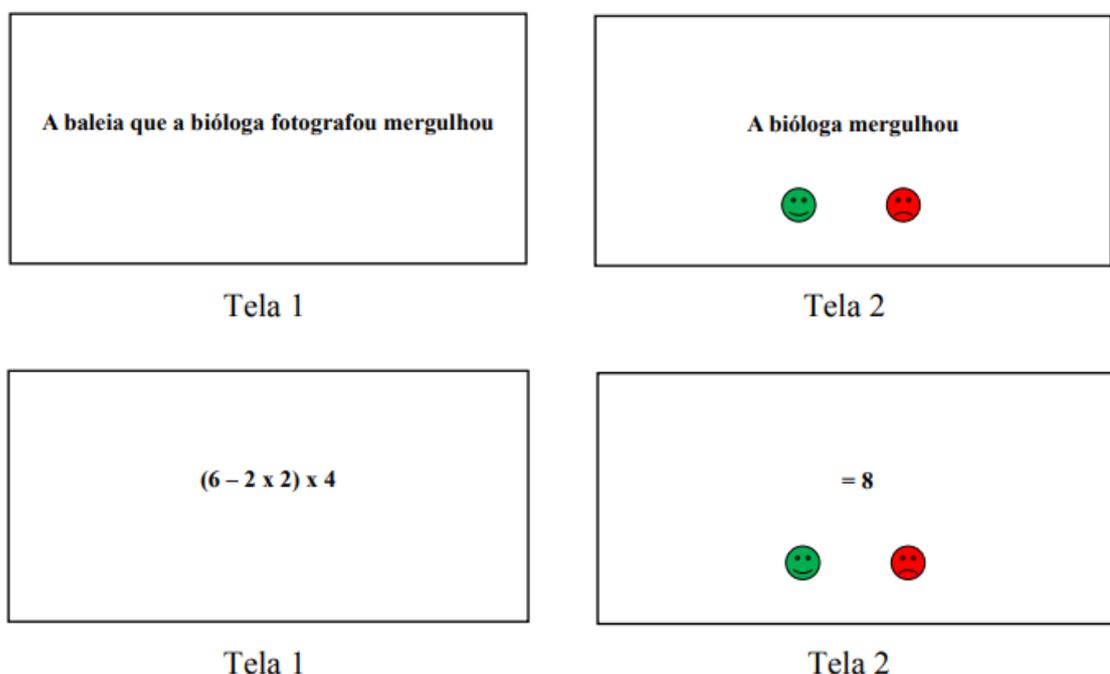


Figura 4 – exemplo de fichas apresentadas aos sujeitos no experimento de Marcilese (Fonte: Marcilese, 2011, p. 154).

Considerando tais analogias, Marcilese (2011) analisa, entre as expressões numéricas e as sentenças linguísticas, o *priming* sintático, o qual “pode ser caracterizado como a facilitação do processamento que ocorre quando uma dada sentença apresenta a mesma forma sintática que a sentença precedente” (p. 148). Conclui que para o experimento que tem foco nas expressões

numéricas, os dados não permitem uma correlação forte, o que está em consonância com pesquisas anteriores.

Almeida e Branco (2018) analisam erros contidos nas produções escritas de 68 alunos de sexto ano, em quatro tarefas que envolvem os números racionais e expressões numéricas, sendo dois problemas e duas expressões na forma algébrica. Concluem que os erros dos alunos são por falta de compreensão e domínio de procedimentos como erros de prioridades nas operações e interpretação dos problemas. Para as autoras, "é particularmente relevante que os seus desempenhos sejam piores na resolução de problemas" (p. 107), pois embora alguns alunos consigam memorizar algoritmos e resolver corretamente longas expressões numéricas, não mobilizam tal conhecimento para a resolução de problemas elementares, e isso decorre da ênfase em símbolos desprovidos de contexto, sem compreensão de representação e modelos.

Vieira, Rios e Vasconcelos (2020) analisam as razões das dificuldades encontradas por alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental quanto ao entendimento e utilização da simbologia matemática no processo de resolução de situações problema contextualizadas ou não. Para tal, propõem uma série de tarefas aritméticas e algébricas, nas quais os estudantes devem representar suas resoluções de forma escrita, e mediante análise de tais respostas os autores problematizam as dificuldades encontradas. Os resultados apontam que o ensino da Matemática ocorre de forma mecânica, no qual a maior parte dos conteúdos é apresentada como resolução de fórmulas descontextualizadas. Assim, faz-se necessário que o aluno consiga ler e interpretar situações problema, dominando diferentes tipos de linguagem, especificamente códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, além de analisar, compreender e decidir quais estratégias utilizar para a resolução dos problemas. A maior parte das resoluções analisadas foi proveniente de cálculos mentais, cujos registros nos rascunhos continham, em alguns casos, expressões numéricas, sem a utilização de expressões algébricas ou equações, embora os mesmos conseguissem identificar qual equação serviu como representação da questão.

3.3 Estudos sobre padronização na forma de expressões numéricas e Geometria

Nakamura (2003) trabalhou com alunos de nono ano do Ensino Fundamental e buscou a generalização de padrões aritméticos, a partir de expressões aritméticas oriundas do cálculo das medidas de áreas de figuras geométricas para a construção de expressões algébricas. Nakamura (2003) atenta para possíveis discrepâncias no processo de construção de uma expressão algébrica sem validá-la, pois existem múltiplas representações possíveis [por expressões numéricas]. Segundo a autora, as expressões numéricas que descrevem o padrão da sequência são diretamente generalizáveis, e as não generalizáveis são aquelas cujos valores estão implícitos. Desta forma, Nakamura (2003) aborda as expressões numéricas, tanto as diretamente generalizáveis quanto as não diretamente generalizáveis, como meio que possibilita a generalização de padrões geométricos para chegar a expressões algébricas.

Modanez (2003) apresenta uma retrospectiva histórica do pensamento algébrico, com as fases retórica, sincopada e simbólica, e estuda a representação de situações de generalização numérica em problemas de área de figuras planas. Apresenta como dificuldade de

aprendizagem da Álgebra a diferenciação entre uma expressão numérica e uma expressão algébrica. Em uma turma de sexta série do Ensino Fundamental, durante 14 aulas, Modanez (2003) aplicou, em conjunto com a professora da turma, uma sequência didática com situações envolvendo geometria. Tal sequência utilizou os registros de representação figural, discursivo, numérico e algébrico, e tratamentos em um mesmo registro, conforme a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993) e da mudança de quadros de Douady (1987): do geométrico para o aritmético, e do aritmético para o algébrico.

A autora conclui que se a sequência didática engajar o aluno na resolução de problemas, nos quais ele investigue padrões em sucessões numéricas e representações geométricas, identificando estruturas que possam descrevê-los simbolicamente, para assim construir noções algébricas pelas regularidades, então essa sequência pode proporcionar ao aluno a introdução do pensamento algébrico.

3.4 Estudos sobre expressões numéricas e pensamento algébrico

Freire (2011) investiga como ocorre o desenvolvimento de conhecimentos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com uso de atividades manipulativas e recursos digitais. A pesquisa inicialmente relaciona os conceitos de álgebra e aritmética, e discorre sobre conhecimentos de professores, investigando os conhecimentos algébricos dos mesmos. A investigação se deu em três etapas: oficina de formação, planejamento e prática, cada uma tendo como instrumento de produção de dados observação e entrevista. Os instrumentos são situações com Objetos de Aprendizagem como a balança, os problemas relativos à generalização e à incógnita. Os resultados indicam que, dentre as concepções de conhecimento algébrico das professoras, as relações entre as expressões numéricas e simbólicas favoreceram a compreensão do pensamento algébrico.

Mestre e Oliveira (2011) analisam como a exploração de estratégias de cálculo a partir de expressões numéricas particulares pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização matemática e para a sua expressão em linguagem natural, e ainda para a iniciação à simbolização. A partir de três atividades, as autoras trabalham questões de generalização em expressões numéricas em uma turma de terceiro ano. O foco das autoras está no pensamento algébrico, que para Carraher e Schliemann (2007), acarreta novas visões sobre a relação entre a Aritmética e a Álgebra, e a possibilidade de construir uma ponte entre elas, e que dentre as atividades que contribuem para tal construção estão: a compreensão do comportamento das operações e a extensão do sistema numérico, fortalecendo os alicerces de cálculo e a compreensão dos significados das operações e formas de pensar matemática (MESTRE; OLIVEIRA, 2011).

As tarefas integradas na experiência de ensino centraram-se na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, e tendo em conta os tópicos matemáticos (MESTRE; OLIVEIRA, 2011, p.18).

As autoras concluem que por meio da exploração de diferentes estratégias de cálculo através de expressões numéricas particulares, pode-se contribuir para a capacidade de generalização expressa em linguagem natural e em linguagem matemática.

Soares (2018) aborda a educação algébrica, considerando as expressões numéricas como parte da constituição do pensamento algébrico. No levantamento bibliográfico, descreveu que em álgebra se utiliza a linguagem sincopada na resolução das situações, bem como a utilização de símbolos convencionais e não convencionais relacionados às propriedades e conceitos; que o modo algébrico de pensar dos sujeitos das pesquisas é limitado por crenças e rotinas (algoritmo único, esquerda para a direita, necessidade de resultado numérico e único, não analisam respostas encontradas) e modo ingênuo, com estratégias extramatemáticas, sem dificuldade no uso de técnicas, mas sim em explicar e justificar os procedimentos utilizados, não reconhecendo a estrutura interna da equação como princípio de equivalência, focando na utilização de manipulações algébricas, com um significado processual tecnicista, pouco estruturado; que um estudante é algebricamente letrado se ler, descrever, analisar, compreender, representar e escrever textos que utilizam códigos algébricos, de várias naturezas, como por exemplo, numérica, gráfica, retórica, esquemática, simbólica. Soares (2018) buscou identificar quais elementos relacionados ao pensamento algébrico são reconhecidos por professores em atividades que com tal foco e que foram destinadas a alunos de sexto e de sétimo ano do Ensino Fundamental, concluindo que os professores afirmam conhecer o pensamento algébrico, ou da graduação ou de formação continuada, mas não apresentam conceitualização deste.

Santos, Pereira e Nunes (2017) buscam verificar quais características do modelo epistemológico de Álgebra são revelados na concepção de 23 professores de um curso de especialização. Para isso, realizam um Percurso de Estudo e Pesquisa, a partir da Teoria Antropológica do Didático. Afirmam que o modelo dominante da álgebra escolar é a aritmética generalizada, destacando que dentre os elementos mais significativos nas atividades de álgebra escolar estão a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica. Concluem que para os professores a Álgebra e seu ensino está ligada às operações com letras e números e generalização, partindo de um contexto numérico, da tradução de expressões numéricas para gerais.

3.5 Expressões numéricas como característica do professor de Matemática

Silva (2014) estuda através de Performances Matemáticas Digitais (PMD) a imagem do Matemático, e dentre as caracterizações de um matemático se encontram professor de matemática que resolve expressões numéricas difíceis. Em uma turma de extensão, composta por estudantes de graduação, o autor propõe a criação de duas PMD, resultando em uma canção e um vídeo, no qual a Matemática é vista como monstro a ser derrotado por super-heróis: os matemáticos; esses representados por alguns estudantes como pesquisadores, e pela maioria como professores. O matemático foi visto também como mágico, pois estudantes não produzem sentido a partir da comunicação matemática em sala de aula, vendo operações aritméticas e algébricas como passes de mágica.

4. Considerações

As expressões numéricas podem ser vistas como uma escrita matemática de situações, e nos textos analisados elas serviram como suporte em estudos sobre generalização de padrões, nos quais as regularidades eram descritas na forma de expressões, como análise da escrita matemática, em comparação com a língua materna, no estudo aprofundado do sentido das operações, devido às propriedades e regras de prevalência de uma expressão, e por fim, na caracterização de um professor de Matemática.

Para o estudo das expressões e do sentido de número, a discussão sobre como se escreve, com ou sem sinais de associação, sobre o que ocorre caso os sinais de associação troquem de lugar (parênteses no lugar dos colchetes) e sua impossibilidade de resolução neste caso, levou à ideia da possibilidade de escrever somente com parênteses, repetindo-os, conforme linguagem computacional. A respeito do trabalho com expressões numéricas em sala de aula, chegou-se à conclusão que é realizado de forma expositiva, com uma declaração de regras a serem seguidas, embora a discussão sobre absurdos matemáticos tenha ocorrido, como no exemplo de resolver não seguindo as ordens de prevalência.

O trabalho sobre o sentido da multiplicação, seja por configuração retangular ou por agrupamentos, teve como meio de escrita expressões numéricas, que modelaram os problemas e traduziram as questões para sua resolução. Reparou-se aqui em dois momentos: o primeiro relativo à tradução do problema e à escrita da expressão numérica, e o segundo referente à resolução desta expressão, com a necessidade de seguir as regras de prevalência. O mesmo se deu nos trabalhos referentes à generalização do cálculo de medidas em Geometria: expressões numéricas serviram de suporte para a representação das generalizações do cálculo de área e volume.

Ainda sobre a escrita, os estudos que analisaram as expressões numéricas como linguagem, chegaram à conclusão que existe uma correlação entre a lógica da escrita e da resolução de problemas na língua materna e na linguagem matemática, bem como da necessidade de dar sentido aos contextos dos problemas, para que não ocorra simplesmente a memorização de regras.

Os estudos sobre pensamento algébrico abordaram as expressões numéricas tanto como um obstáculo, no sentido do estudante não conseguir diferenciar uma expressão numérica de uma expressão algébrica, quanto como uma etapa, na qual a generalização numérica é um passo na construção do pensamento algébrico.

As expressões numéricas como característica do professor de Matemática reforçam a ideia da forma com a qual historicamente vem sendo trabalhado este conteúdo: um apanhado de regras apresentado por um professor, que detém os sentidos e os significados e não os partilha com os estudantes.

Os textos nos quais as expressões numéricas serviram como suporte para outras pesquisas trabalham a ideia de expressão matemática de problemas, cujas regras são construídas mediante os significados dos números e das operações nestes problemas,

indicando, assim, a necessidade de trabalhar expressões contextualizadas em situações com as quais seus elementos e regras possam ser interpretados e seu sentido construído.

5. Referências

- ALMEIDA, L.; BRANCO, N. Erros cometidos pelos alunos de 6.º ano a operar com números racionais. **Revista da UIIPS – Unidade de Investigação do Instituto Politécnico de Santarém**, Santarém, v. 6, n. 1, 2018, p. 95-109
- BARBOSA, G. S.; MAGINA, S. M. P. Construindo Significado para expressões numéricas multiplicativas a partir do jogo de mensagem. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 1, p. 9-30, 2014.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.
- CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: Information Age, 2007, p. 669-705.
- CEBOLA, G.; BROCARD, J. Estratégias, Representações e Flexibilidade na Resolução de Tarefas de Comparação Multiplicativa. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 64, p.568-590, 2019.
- FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; GUZMAN, R. R. Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**, Cidade do México, v.13, n.2, jul., 2010
- FREIRE, R. S. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2011. Tese. (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- FUCHS, M. J. **Revistas na área da educação e educação matemática: espaços para socialização-discussão-aprendizado**. 2012. In: <http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/licenciaturaemmatematicaitaqui/files/2012/05/Mapeamento-de-Revistas-MARIELE-JOSIANE-FUCHS.1.pdf> acesso em 29/10/2020
- GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. **LOGEION: Filosofia da informação**, Rio de Janeiro, v. 6 n. 1, p.57-73, set.2019/fev. 2020. Disponível em: <https://sites.usp.br/dms/wp-content/uploads/sites/575/2019/12/Revis%C3%A3o-Sistem%C3%A1tica-de-Literatura.pdf>. Acesso em: 18 set. 2023.
- GREGOLIN, V. R. **O Conhecimento Matemático Escolar: Operações com Números Naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental**. 2002. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002.
- KRUSZIELSKI, L. **Resolução de exercícios aritméticos e memória de trabalho**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.
- MARCILESE, M. **Sobre o papel da língua no desenvolvimento de habilidades cognitivas superiores**. 2011. Tese (Doutorado em Letras) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MESTRE, C. ; OLIVEIRA, H. A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4.º ano. **Interações**, Lisboa, v. 20, p. 9 - 36, 2012.

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução do pensamento algébrico**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. 2018. Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MONTENEGRO, J. A.; BORBA, R. E. S. R; BITTAR, M. Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias. **Educação e realidade**, Porto Alegre, v. 45, n. 1, 2020, p. 1-26.

NAKAMURA, O. Y. A. **Generalização de Padrões Geométricos: caminho para a construção de Expressão Algébrica no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

OLIVEIRA, C. A. V. **Relações lógicas estabelecidas por alunos de uma quarta série do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

OTTES, A. B.; FAJARDO, R. Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017. Disponível em <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/30/20>. Acesso em: 21 ago. 2020.

ROCHA, M. I.; MENINO, H. A. Desenvolvimento do sentido do numero na multiplicacao. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, Cidade do México**, v. 12, n. 1, mar. 2009, p. 103-132

SANTIAGO, I. **Formulação e resolução de problemas matemáticos: um estudo exploratório sobre o pensamento de crianças do Ensino Fundamental**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro Universitário Moura Lacerda, Ribeirão Preto, 2011.

SANTOS, A. B. C; PEREIRA, J. C. S; NUNES, J. M. V. Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, 2017, p. 81-103.

SILVA, A. P.; SPINILLO, A. G.; SENA, M. E. A compreensão de crianças acerca das diferentes facetas dos Números: Um estudo sobre sentido numérico. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12. **Anais [...]**. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. p. 1-8. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6631_3478_ID.pdf. Acesso em: 20 set. 2023.

SILVA, R. Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, v. 49, ago 2014, p. 950-973.

SOARES, R. M. **Pensamento algébrico: quais elementos são identificados por professores de matemática em atividades com este foco?** 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade.** Curitiba: UFPR, 2009.

VIEIRA, A. L.; RIOS, P. S; VASCONCELOS, C. A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 1, 2020, p. 43-67.

WATABE, L. **Características da resolução de problemas por alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.** 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.