

INDUTÂNCIA MÚTUA ENTRE SOLENOIDES CONCÊNTRICOS: UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MODELOS

MUTUAL INDUCTANCE BETWEEN CONCENTRIC SOLENOIDS: A COMPARATIVE STUDY BETWEEN MODELS

José Wagner Cavalcanti Silva¹, José David de Araújo², José Ronaldo Souza Nunes³, Agda Maria Castro Marques⁴

Recebido: dezembro/2022 Aprovado: setembro/2023

Resumo: O uso de modelos ideais é o primeiro passo para a descrição matemática no estudo dos fenômenos naturais. Eles são usados largamente nos livros didáticos para a disciplina de Física Básica nos cursos de graduação, na grande área das ciências exatas e naturais e também na das engenharias, para sedimentar os conceitos básicos do conteúdo. Contudo, neste trabalho procuramos ir um pouco além dos requisitos do modelo ideal para a descrição do fenômeno eletromagnético da indução mútua. Neste trabalho, é apresentado um modelo teórico para indutância mútua entre dois solenoides concêntricos, no qual é levado em conta o cenário em que o raio e comprimento dos solenoides apresentam a mesma ordem de grandeza. Ademais, foi realizada uma investigação experimental com o intuito de validar o modelo proposto com base nos dados observados da força eletromotriz induzida nos terminais do solenoide interno, devido à variação do fluxo magnético, que atravessa a área delimitada por suas espiras, gerado pelo solenoide externo cujos terminais foram conectados a um gerador de função configurado para gerar ondas senoidais.

Palavras-chave: Indução mútua, fluxo magnético, força eletromotriz induzida

Abstract: The use of ideal models is the first step to be taken for their mathematical description in the study of natural phenomena. They are used widely in the textbooks for basic physics discipline in undergraduate courses, in the great area of exact and natural sciences as well as in engineering, to consolidate the basic concepts of the studied content. However, in this work we try to go a little beyond the requirements of the ideal model for the description of the electromagnetic phenomenon of mutual induction. In this work, a theoretical model for mutual inductance between two concentric solenoids is presented, in which the scenario where the radius and length of the solenoids have the same order of magnitude is taken into account. Furthermore, an experimental investigation was carried out in order to validate the proposed model based on the observed data of the electromotive force induced in the terminals of the internal solenoid due to the variation of the magnetic flux, which crosses the area delimited by its turns, generated by the external solenoid whose terminals were connected to a function generator configured to generate sine waves.

Keywords: Mutual induction, magnetic flux, induced electromotive force.

¹  <https://orcid.org/0000-0003-2605-5969> - Doutor em Ensino de Ciência e Matemática pela UNICAMP. Docente da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil. E-mail: wagner.silva@df.ufcg.edu.br

²  <https://orcid.org/0000-0001-8326-7170> - Bacharelado em Ciência e Tecnologia (UFERSA). Pau dos Ferros, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: jasedavidaraujo@gmail.com

³  <https://orcid.org/0000-0001-5668-3646> - Bacharelado em Engenharia Civil (UFERSA). Pau dos Ferros, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: ronaldofex@gmail.com

⁴  <https://orcid.org/0000-0002-8419-6703> - Bacharelada em Engenharia Civil (UFERSA), Pau dos Ferros, Rio Grande do Norte, Brasil. Email: agdamarques79@gmail.com

1. Introdução

O estudo do eletromagnetismo nos cursos de graduação, nas diversas áreas das ciências exatas e naturais e das engenharias é, via de regra, realizado por meio de modelos teóricos que representam situações ideais e, entre tais modelos, o da indução mútua entre indutores não fica de fora. Vale a pena destacar que apenas pelo fato de ressaltar esse aspecto na maneira de desenvolver os conteúdos de física básica não significa que temos o intuito de enveredar a ponto de elaborar uma crítica acerca da forma como tal tema é tratado nos livros didáticos. Além disso, esses materiais didáticos têm finalidade de dar suporte à disciplina de Física Básica, a qual é destinada a construir os alicerces dos conceitos físicos de seu conteúdo programático. Desse modo, é compreensível que o nível dos temas estudados tenha seu ponto de partida em modelos mais simples.

A pretensão deste trabalho é de propiciar uma exploração mais detalhada sobre o tema da indução mútua, com o intuito de investigar as minúcias de tal fenômeno, levando em conta a conjuntura na qual as dimensões (raio e comprimento) dos solenoides são da mesma ordem de magnitude. Podemos citar o exemplo dos trabalhos de Soma, Galbraith e White (1987), Zierhofer e Hochmair (1996), Pichorim e Abatti (2004) nos quais, para aplicar a técnica WPT (*Wireless Power Transfer*) via acoplamento indutivo em IMD (*Implantable Medical Device*), a dimensão das bobinas não pode ser desconsiderada frente à pequena distância entre os dois indutores. No caso do IMD, devido às restrições de ordem biológica, o efeito das dimensões das bobinas ganha uma magnitude bastante significativa limitando, por conseguinte, a técnica WPT a apenas dezenas de milímetros (GARCIA, 2022).

O fenômeno da indução mútua foi investigado por Michael Faraday, em 1831. O arranjo experimental construído por ele era composto de um anel de ferro envolto por dois enrolamentos distintos de fio de cobre.

Figura 1 – Indutores de cobre enrolados em um núcleo de ferro, usado por Faraday

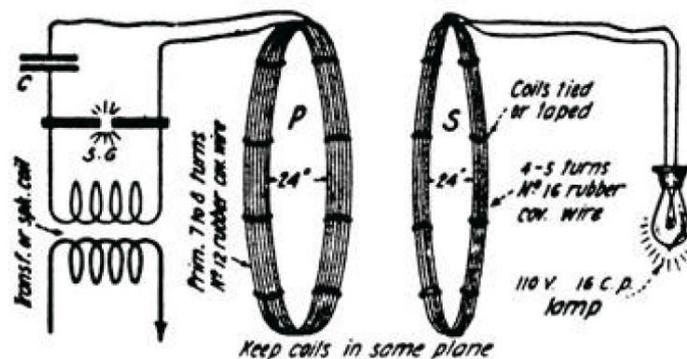


Fonte: Martins, 2004.

Essas considerações, com suas consequências, a esperança de obter eletricidade do magnetismo comum, estimulou-me várias vezes a investigar experimentalmente o efeito indutivo das correntes elétricas. Eu, ultimamente, cheguei a resultados positivos, e não apenas tive minhas expectativas realizadas, mas obtive a chave que parece abrir várias explicações dos fenômenos magnéticos de Arago e, também, descobrir um novo estado que pode, provavelmente, ter influência em alguns dos mais importantes efeitos das correntes elétricas. (FARADAY, 1839-1855, p. 265, apud MARTINS, 2004, p. 525).

O acoplamento magnético feito por meio do núcleo de ferro otimiza a transferência de energia de uma bobina para outra. Contudo, mesmo que não exista uma estrutura sólida ferromagnética, a interação entre as bobinas ocorre. É evidente que a magnitude dessa interação será menor e a transferência de energia entre as bobinas não ocorre de forma otimizada. Entre o final do século XIX e início do século XX, Nikola Tesla propôs a transferência de energia utilizando o ar como acoplador magnético entre duas bobinas, e utilizou a técnica de ressonância entre as bobinas, de modo a permitir o aumento da eficiência e do ganho de tensão. De acordo com Hui, Zhong e Lee (2014), devido à proximidade entre as duas bobinas, a implementação de um capacitor é útil para compensar a dispersão indutiva entre as bobinas.

Figura 2 – Esquema de Nikola Tesla de arranjo para transferência de energia sem fio



Fonte: REHMAN; BAHARUDIN; NALLAGOWNDEN; ISLAN, 2018.

A figura acima é a representação esquemática do arranjo experimental feito por Tesla, em 1914, em sua investigação acerca da técnica WPT (REHMAN; BAHARUDIN; NALLAGOWNDEN; ISLAN, 2018). O intuito de apresentar essa contextualização da aplicação da técnica WPT é de reforçar a necessidade de se levar em conta as dimensões das bobinas em investigações experimentais, tanto sobre a autoindução em um indutor quanto acerca da indução mútua entre dois ou mais indutores.

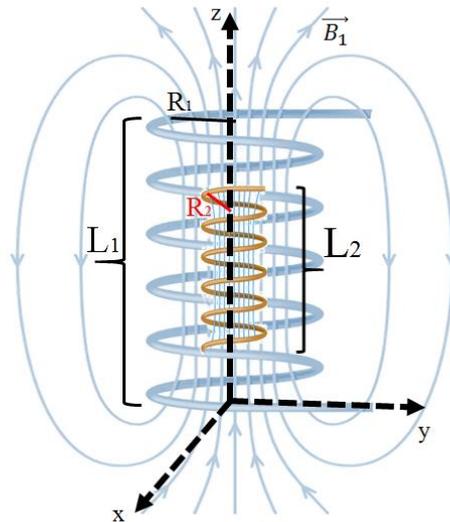
2.0 problema de pesquisa

Nos livros didáticos de Física Básica comumente adotados nos cursos de graduação, na grande área das ciências exatas e naturais e também nas engenharias, a abordagem teórica do fenômeno eletromagnético da indução mútua entre dois indutores é realizada por meio de um modelo matemático baseado em uma situação ideal. Para o caso no qual tais indutores apresentem geometria cilíndrica e estejam montados de maneira concêntrica (Figura 3), o primeiro passo para deduzir a expressão que descreve a indutância mútua é escrever o campo magnético gerado por um solenoide externo. De modo a facilitar o entendimento do raciocínio empregado para deduzirmos a expressão para a indutância mútua, vamos definir as grandezas que se referem ao solenoide externo com o número 1 no índice subscrito e, de forma análoga, para o solenoide interno o número 2 como índice subscrito. Considerando o modelo ideal para esse campo, temos:

$$B_1 = n_1 \mu_0 i_1 \quad (1)$$

Nessa equação, n_1 , μ_0 e i_1 são respectivamente o número de espiras por unidade de comprimento, a permeabilidade magnética do vácuo e a corrente elétrica que flui pelas espiras do solenoide externo.

Figura 3 – Solenoides concêntricos



Fonte: Os autores.

O passo seguinte é calcular o fluxo magnético total gerado pelo campo magnético do solenoide externo (B_1) que atravessa a área delimitada pelas espiras do solenoide interno:

$$\phi_{B_2} = N_2 \iint \vec{B}_1 \cdot \hat{n} da_2 = \frac{N_1 N_2}{L_1} \mu_0 i_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} r dr d\theta = \frac{N_1 N_2}{L_1} \mu_0 i_1 A_2$$

Lembrando que a Lei de Indução de Faraday é: $\varepsilon_2 = -\frac{d\phi_{B_2}}{dt}$, é possível mostrar que a indutância mútua entre dois solenoides concêntricos pode ser calculada por meio da seguinte expressão:

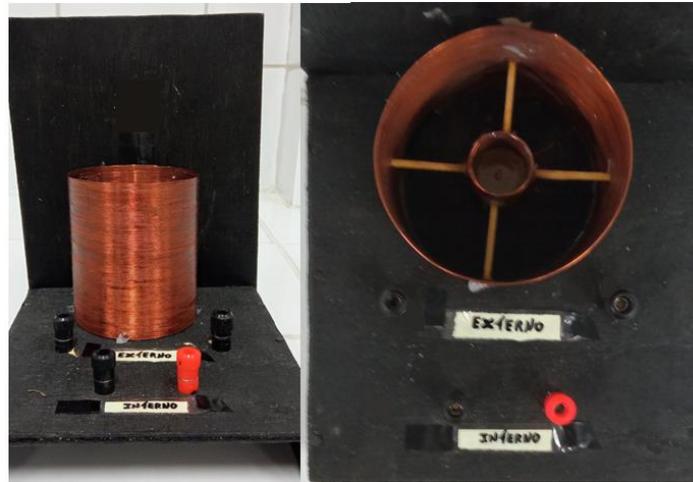
$$M_{12} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A_2}{L_1}, \quad (2)$$

Nessa equação, o M_{12} é entendido como sendo a indutância mútua entre o solenoide externo (1) e o interno (2). É evidente que $M_{12} = M_{21}$, todavia, a sequência dos índices no símbolo da indutância mútua está relacionada com a indicação de qual solenoide está gerando o campo magnético cuja variação de fluxo em relação ao tempo excitará a indução da força eletromotriz no outro solenoide. No nosso caso, o campo magnético gerado pelo solenoide externo é que excitará a indução da força eletromotriz nos terminais do solenoide interno.

Contudo, os requisitos do modelo expresso pela equação (2) não são atendidos quando a implementação experimental é realizada. Essa assertiva é sustentada pelo fato observado no âmbito dos laboratórios didáticos de física que, comumente, apresentam carência de arranjos experimentais e, por conseguinte, se torna necessária a construção destes aparatos – seja pelo professor ou pelos alunos – para exploração de algum conteúdo. Na figura 4, abaixo, estão

expostos os solenoides construídos pelos estudantes da disciplina de Eletricidade e Magnetismo para o estudo da indução mútua (Figura 4).

Figura 4 – Solenoides concêntricos.



(a) Vista de perfil

(b) Vista superior

Fonte: Os autores.

Ao submeter o solenoide interno à variação do fluxo do campo magnético gerado pelo solenoide externo (que está conectado à fonte, cuja corrente elétrica é de natureza alternada), a força eletromotriz induzida mensurada em seus terminais apresenta uma discrepância relevante em relação àquela prevista pelo modelo teórico, expresso pela equação (2).

Fundamentados nessa observação, podemos consubstanciar o problema de pesquisa por meio da seguinte questão: Qual adequação pode ser realizada no modelo matemático que descreva a indutância mútua entre dois solenoides concêntricos e que propicie melhor concordância entre os valores da força eletromotriz induzida prevista pelo modelo e seu valor medido experimentalmente?

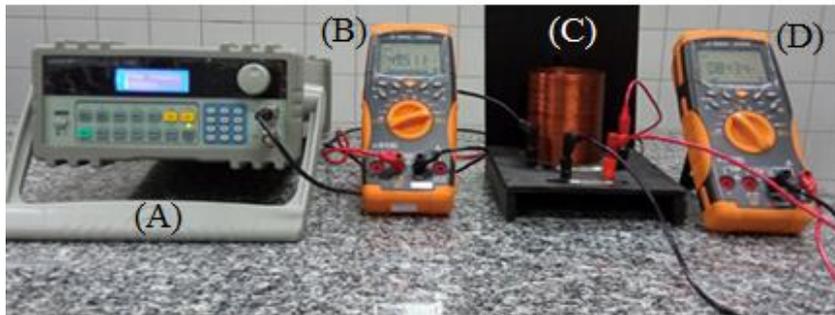
Partindo da questão-problema apresentada, o objetivo deste trabalho é a busca de uma expressão matemática que descreva a indutância mútua entre dois solenoides reais e concêntricos e, por conseguinte, validar essa expressão por meio da observação experimental da força eletromotriz induzida prevista por meio do modelo proposto.

3. Percorso metodológico

Para atingir os objetivos descritos, a metodologia empregada nesta pesquisa, que é de caráter experimental, valeu-se de uma abordagem dedutiva no estudo do modelo matemático para a definição da indutância mútua, e de uma abordagem indutiva para investigar a adequação do modelo teórico, partindo da análise dos dados da mensuração da força eletromotriz induzida, por meio de experimentação. De fato, de acordo com Fachin (2005), “há uma reciprocidade entre os métodos indutivo e dedutivo”. Portanto, no percurso metodológico de uma investigação, é possível valer-se de ambos os métodos.

Destarte, para a embasar a necessidade de reescrever o modelo matemático da indutância mútua, foi delineado um processo experimental com o intuito de medir a força eletromotriz induzida em um dos solenoides e confrontá-la com a previsão do modelo teórico ideal, que é aquele que considera os solenoides como ideais (com seu comprimento muito maior do que seu raio). Tal processo foi executado por meio de um arranjo experimental (Figura 4) constituído por um gerador de função (A), que opera como uma fonte de tensão elétrica alternada, solenoides concêntricos (C) e dois multímetros: um deles (B) realizando a mensuração da corrente elétrica que flui pelo solenoide externo e o outro (D) mensurando a força eletromotriz induzida nos terminais do solenoide interno.

Figura 5 – Arranjo experimental



Fonte: Os autores.

Os parâmetros que caracterizam os solenoides usados neste trabalho estão expostos no quadro 1, a seguir:

Quadro 1 – Características dos solenoides

Solenoide 1 (Externo)	Solenoide 2 (Interno)
N = 150 espiras	N = 50 espiras
$R_1 = (3,80 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$R_2 = (1,00 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ m}$
$A_1 = (4,540 \pm 0,006) \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$	$A_2 = (3,140 \pm 0,001) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
$L_1 = (9,00 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$L_2 = (3,00 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Fonte: Os autores.

As medidas do comprimento e do diâmetro dos solenoides foram obtidas por meio de um paquímetro.

A força eletromotriz induzida nos terminais do solenoide interno (índice 2) pode ser prevista pela expressão:

$$\varepsilon_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt}, \quad (3)$$

Nessa equação, ε_2 e i_1 são, respectivamente, a força eletromotriz induzida no solenoide interno e a corrente que flui pelo solenoide externo (índice 1). Considerando que a corrente elétrica fornecida pelo gerador de função é descrita por uma função harmônica:

$$i_1 = i_{1\text{máx}} \text{sen}(\omega t), \quad (4)$$

Assim, calculando-se a média quadrática em um ciclo completo da potência dissipada pela resistência ôhmica do fio que compõe o solenoide, é possível obter a força eletromotriz eficaz (ou tensão elétrica eficaz) nos terminais do solenoide interno. O cálculo de tal grandeza é necessário, porque o que é medido pelo multímetro é a tensão elétrica eficaz (ou RMS - *Root Mean Square*). Dessa forma, a tensão elétrica eficaz medida nos terminais do solenoide interno é:

$$\varepsilon_{2Eficaz} = M_{12}\omega i_{1Eficaz} \quad (5)$$

Partindo da medida da tensão elétrica eficaz, realizada por meio do multímetro, é possível calcular a discrepância entre esse valor e aquele obtido por meio da equação (5), cuja indutância mútua M_{12} foi obtida levando-se em conta o modelo ideal para os solenoides, expressa pela equação (2). Essa discrepância serviu como alicerce para a reflexão acerca da maneira pela qual a expressão da indutância mútua poderia ser reescrita de modo que a diferença entre os resultados experimentais e os previstos pelo modelo pudesse ser menor. As proposições que embasaram o processo dedutivo para a obtenção da nova expressão da indutância mútua foram:

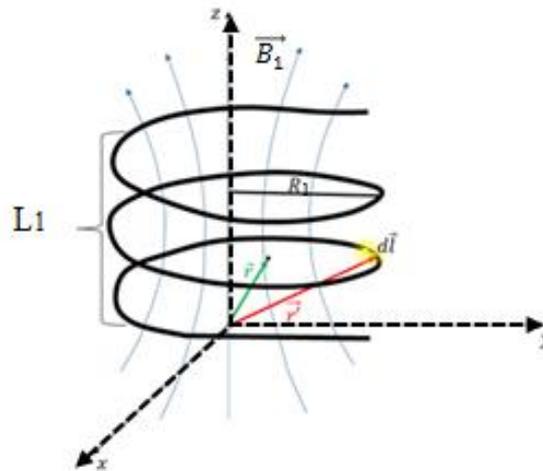
- O campo magnético no interior do solenoide é função tanto da distância do seu eixo de simetria (r) como da coordenada sobre o mesmo eixo (z), ou seja, $B(r, z)$;
- Como há uma variação do campo magnético ao longo do eixo de simetria e ao longo da direção radial, a taxa de variação em relação ao tempo do fluxo magnético no interior do solenoide foi definida como a taxa de variação em relação ao tempo do fluxo magnético médio no volume delimitado pelo solenoide.

Com base no método dedutivo, o modelo matemático para a indutância mútua para dois solenoides concêntricos foi expresso em termos dos seus parâmetros geométricos (raio e comprimento). Os resultados obtidos por meio deste modelo foram postos em confronto com aqueles obtidos por meio do modelo ideal para avaliarmos o quanto tal modelo melhorou a estimativa da força eletromotriz induzida.

4. Resultados e discussões

Nesta seção, será apresentado e discutido o modelo matemático proposto para o cálculo da indutância mútua entre dois solenoides reais concêntricos, como também será apresentada a análise dos dados obtidos por meio do arranjo experimental utilizado. Visando deixar mais claro e intuitivo o raciocínio empregado para a elaboração do modelo matemático, a figura 5, a seguir, expõe o esquema de um solenoide real, representando o solenoide externo. Além disso, também está representado na figura o sistema de coordenadas pelo qual foram escritos os vetores de posição para o cálculo do campo magnético.

Figura 5: Modelo geométrico para um solenoide finito



Fonte: Os autores.

Pela simetria do problema, podemos escrever o vetor que localiza o ponto do espaço (\vec{r}), no qual o campo magnético será calculado e o vetor que localiza o elemento infinitesimal de comprimento (\vec{r}') em coordenadas cilíndricas. Portanto:

$$\vec{r} = r\hat{\rho} + z\hat{k} \quad (6)$$

$$\vec{r}' = R\hat{\rho} + z'\hat{k} \quad (7)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (r - R)\hat{\rho} + (z - z')\hat{k} \quad (8)$$

$$d\vec{l} = R d\theta \hat{\theta} \quad (9)$$

Lembrando que a Lei de Biot-Savart pode ser escrita em termos dos parâmetros apresentados acima, obtemos:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi |\vec{R}|^3} \quad (10)$$

Substituindo as equações (8) e (9) em (10) é possível mostrar que o campo magnético escrito em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\vec{B}_1 = \frac{N_1 \mu_0 A_1 i_1 R_1}{2L_1} \frac{1}{(r - R_1)} \left[\frac{z - L_1}{\sqrt{(r - R_1)^2 + (z - L_1)^2}} - \frac{z}{\sqrt{(r - R_1)^2 + z^2}} \right] \hat{k} \quad (11)$$

Perceba que o campo é definido para cada valor da coordenada r (distância entre o ponto de interesse para o valor campo magnético e o eixo de simetria) e da coordenada z (que define a altura em relação à uma das bases do solenoide). A expressão para calcular o fluxo magnético que atravessa a área do solenoide interno é dada por:

$$\Phi_{B_2} = N_2 \iint \vec{B}_1 \cdot \hat{n} da \quad (12)$$

onde N_2 , \hat{n} e da são, respectivamente, o número de espiras do solenoide interno, o versor perpendicular à área delimitada pelas espiras desse solenoide e o elemento infinitesimal de área.

$$\Phi_{B_2}(r, z) = \frac{N_1 N_2 \mu_0 R_1 A_1 i_1}{2L_1 L_2 A_2} f(z, r), \quad (13)$$

em que

$$f(z, r) = \frac{1}{(r-R_1)} \left[\frac{z-L_1}{\sqrt{(r-R_1)^2+(z-L_1)^2}} - \frac{z}{\sqrt{(r-R_1)^2+z^2}} \right] \quad (14)$$

Está evidente que para cada valor dos parâmetros r e z , haverá um valor para o fluxo magnético. Portanto, aplicando a segunda prerrogativa indicada no percurso metodológico, vamos definir o fluxo magnético médio no volume do solenoide interno como:

$$\bar{\Phi}_{B_2} = \frac{1}{V} \iiint \Phi_{B_1}(r, z) dV \quad (15)$$

Como a região de interesse é o volume delimitado pelo solenoide interno, então, os limites de integração da equação (15) referem-se ao seu comprimento e raio. Contudo, foi percebido que, operando a integração em relação à coordenada radial e configurando o limite superior para uma fração do valor do raio do solenoide interno, propiciou-se uma discrepância menor entre o valor previsto e o observado. Por conseguinte, partindo-se desta constatação experimental, os limites de integração podem ser escritos da seguinte forma (equação 17):

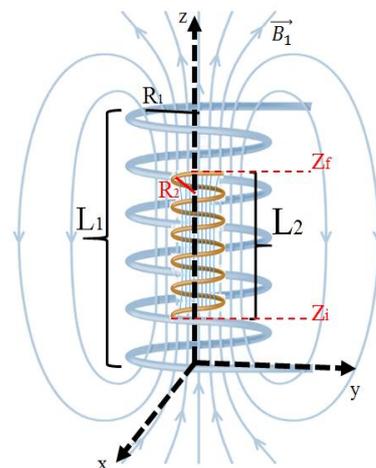
$$\bar{\Phi}_{B_2} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 R_1 A_1 i_1}{2L_1 L_2 A_2} F \quad (16)$$

onde,

$$F = \int_0^{\lambda R_2} \int_{z_i}^{z_f} \int_0^{2\pi} f(z, r) r d\theta dz dr \quad (17)$$

A figura 6, que segue, tem o intuito de proporcionar uma melhor visualização dos limites de integração da equação anterior.

Figura 6: Representação dos parâmetros de integração



Fonte: Os autores.

Pelo fato de os solenoides estarem jungidos concentricamente, os limites superior e inferior da integração ao longo do comprimento podem ser escritos como:

$$z_i = \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \quad (18)$$

e

$$z_f = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \quad (19)$$

Após executar a integração com respeito ao comprimento, a expressão resultante foi expandida em série de potência e truncada ao primeiro termo. Esse procedimento visou simplificar a expressão final que descreve a indutância mútua, com vistas a facilitar a manipulação algébrica ao aplicá-la, posteriormente, à regra de propagação das incertezas das medidas diretas para a indutância mútua.

Com respeito à integração do primeiro termo da série em relação ao parâmetro radial, vale destacar novamente que o limite superior foi definido como sendo uma fração (λ) do valor do raio do solenoide interno. Os dados observados para a força eletromotriz induzida nos terminais desse solenoide apresentaram pequena discrepância para certa fração do valor do raio. Isso pode ser explicado pelo fato de as linhas de campo magnético serem mais uniformes próximo ao centro do solenoide.

$$F = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A_1}{4L_1 L_2 A_2} \left(\sqrt{(L_1 + L_2)^2 + 4R_1^2} - \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + 4R_1^2} \right) \lambda^2 R_2^2 i_1 \quad (20)$$

Para os solenoides usados neste trabalho, o valor da fração do raio do solenoide interno que propiciou menor valor para a discrepância foi de: $\lambda = 0,389$. Esse valor representa aproximadamente a metade do raio do solenoide interno.

A taxa de variação em relação ao tempo do fluxo magnético definido pela equação (22) gera a força eletromotriz induzida no solenoide interno, em acordo com a Lei de Indução de Faraday:

$$\varepsilon_2 = - \frac{d\Phi_{B_2}}{dt} \quad (22)$$

$$\varepsilon_2 = - \left[\frac{N_1 N_2 \mu_0 A_1}{4L_1 L_2 A_2} \left(\sqrt{(L_1 + L_2)^2 + 4R_1^2} - \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + 4R_1^2} \right) \lambda^2 R_2^2 \right] \frac{di_1}{dt} \quad (23)$$

Na qual a grandeza entre os colchetes representa a indutância mútua (M_{12}) dos solenoides.

$$M_{12} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A_1}{4L_1 L_2 A_2} \left(\sqrt{(L_1 + L_2)^2 + 4R_1^2} - \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + 4R_1^2} \right) \lambda^2 R_2^2 \quad (24)$$

Aplicando os parâmetros que caracterizam os solenoides apresentados no Quadro 1, temos que, para este arranjo, o valor obtido para a indutância mútua é:

$$M \cong (27,10 \pm 0,34) \mu H.$$

Os dados experimentais coletados e os resultados previstos em conjunto com suas respectivas incertezas, tanto as associadas à corrente elétrica, que flui pelo solenoide externo, quanto aquelas associadas à força eletromotriz induzida no solenoide interno, calculados por meio das equações (2), (5) e (23), estão expostos no quadro abaixo:

Quadro 2: Dados observados e previstos para a força eletromotriz do solenoide interno

		Modelo Proposto		Modelo Ideal		Observado	
i (A)	δi (A)	ϵ (V)	$\delta \epsilon$ (V)	ϵ (V)	$\delta \epsilon$ (V)	ϵ (V)	$\delta \epsilon$ (V)
4,88E-02	3,71E-04	1,66E-02	1,49E-04	2,02E-02	1,47E-03	1,67E-02	9,02E-05
4,86E-02	3,69E-04	1,81E-02	1,63E-04	2,21E-02	1,60E-03	1,83E-02	9,78E-05
4,83E-02	3,68E-04	1,97E-02	1,77E-04	2,40E-02	1,74E-03	1,99E-02	1,05E-04
4,81E-02	3,66E-04	2,12E-02	1,91E-04	2,59E-02	1,88E-03	2,14E-02	1,13E-04
4,79E-02	3,64E-04	2,27E-02	2,05E-04	2,77E-02	2,01E-03	2,29E-02	1,20E-04
4,74E-02	3,60E-04	2,41E-02	2,17E-04	2,94E-02	2,13E-03	2,43E-02	1,27E-04
4,71E-02	3,59E-04	2,56E-02	2,30E-04	3,12E-02	2,26E-03	2,58E-02	1,34E-04
4,68E-02	3,56E-04	2,70E-02	2,43E-04	3,29E-02	2,39E-03	2,72E-02	1,41E-04
4,65E-02	3,54E-04	2,84E-02	2,56E-04	3,46E-02	2,51E-03	2,86E-02	1,47E-04
4,62E-02	3,52E-04	2,98E-02	2,68E-04	3,63E-02	2,63E-03	3,00E-02	1,54E-04
4,59E-02	3,50E-04	3,12E-02	2,81E-04	3,79E-02	2,75E-03	3,14E-02	1,61E-04
4,50E-02	3,43E-04	3,44E-02	3,10E-04	4,19E-02	3,04E-03	3,47E-02	1,76E-04
4,41E-02	3,37E-04	3,75E-02	3,38E-04	4,56E-02	3,31E-03	3,78E-02	1,91E-04
4,32E-02	3,30E-04	4,03E-02	3,64E-04	4,91E-02	3,57E-03	4,07E-02	2,05E-04
4,23E-02	3,23E-04	4,30E-02	3,88E-04	5,24E-02	3,81E-03	4,34E-02	2,18E-04
4,03E-02	3,08E-04	4,79E-02	4,33E-04	5,83E-02	4,23E-03	4,83E-02	2,42E-04
3,84E-02	2,94E-04	5,21E-02	4,71E-04	6,34E-02	4,61E-03	5,25E-02	2,62E-04
3,65E-02	2,80E-04	5,57E-02	5,04E-04	6,78E-02	4,92E-03	5,61E-02	2,79E-04
3,46E-02	2,66E-04	5,88E-02	5,33E-04	7,16E-02	5,20E-03	5,92E-02	8,97E-03

Fonte: Os autores.

As colunas rotuladas de *modelo proposto* e *modelo ideal* são os valores previstos pelos modelos que descrevem a indutância mútua expressos, respectivamente, pelas equações (2) e (23). O intervalo de frequência a que o indutor externo foi submetido teve como critério de seleção atender à resolução do instrumento de medida utilizado para mensurar a tensão elétrica induzida no solenoide interno. De fato, de acordo com a Lei de Faraday, na equação (22), quanto maior a taxa de variação do fluxo magnético, maior a força eletromotriz induzida. Portanto, quanto maior a frequência, maior a força eletromotriz induzida.

Quadro 3: Comparação entre as incertezas propagadas e os erros experimentais

Modelo Proposto			Modelo Ideal		
$\delta \epsilon$ (V)	E_{ABS} (V)	E%	$\delta \epsilon$ (V)	E_{ABS} (V)	E%
1,49E-04	1,31E-04	0,78%	1,47E-03	3,48E-03	20,82%
1,63E-04	1,45E-04	0,79%	1,60E-03	3,81E-03	20,82%
1,77E-04	1,57E-04	0,79%	1,74E-03	4,13E-03	20,82%
1,91E-04	1,69E-04	0,79%	1,88E-03	4,45E-03	20,82%
2,05E-04	1,82E-04	0,80%	2,01E-03	4,77E-03	20,81%
2,17E-04	1,80E-04	0,74%	2,13E-03	5,07E-03	20,88%
2,30E-04	1,90E-04	0,74%	2,26E-03	5,38E-03	20,88%
2,43E-04	2,02E-04	0,74%	2,39E-03	5,68E-03	20,87%
2,56E-04	2,13E-04	0,75%	2,51E-03	5,98E-03	20,87%
2,68E-04	2,27E-04	0,76%	2,63E-03	6,26E-03	20,86%
2,81E-04	2,38E-04	0,76%	2,75E-03	6,55E-03	20,86%
3,10E-04	2,68E-04	0,77%	3,04E-03	7,22E-03	20,84%
3,38E-04	2,96E-04	0,78%	3,31E-03	7,86E-03	20,82%
3,64E-04	3,22E-04	0,79%	3,57E-03	8,46E-03	20,82%
3,88E-04	3,45E-04	0,79%	3,81E-03	9,03E-03	20,81%
4,33E-04	3,90E-04	0,81%	4,23E-03	1,00E-02	20,80%
4,71E-04	3,64E-04	0,69%	4,61E-03	1,10E-02	20,93%
5,04E-04	3,89E-04	0,69%	4,92E-03	1,17E-02	20,93%
5,33E-04	4,19E-04	0,71%	5,20E-03	1,24E-02	20,92%

Fonte: Os autores.

O erro absoluto (E_{ABS}) e o erro percentual ($E\%$) foram calculados considerando como valor de referência aquele que foi mensurado. Confrontando os resultados expressos na coluna da incerteza instrumental propagada ($\delta\epsilon$) com a do erro absoluto, fica bastante evidente o quanto o modelo para o cálculo da indutância mútua descrito pela equação (23) propiciou uma concordância entre os dados observados e os previstos para a tensão induzida no solenoide interno, contribuindo, dessa forma, para a queda proeminente na discrepância entre esses valores. Outra informação que vale a pena destacar é com respeito à comparação entre o erro absoluto e a incerteza instrumental propagada para cada um dos modelos: em ambos, é perceptível que o erro absoluto é maior do que a incerteza instrumental propagada, o que nos leva a concluir que as discrepâncias obtidas não podem ser completamente explicadas pela incerteza dos instrumentos utilizados. Contudo, está bem evidente que a diferença entre a incerteza propagada e o erro absoluto é bem menor para o modelo proposto que para o modelo ideal, como exposto no Quadro 4.

Quadro 4: Diferença entre as incertezas propagadas e o erros experimentais

Modelo Proposto	Modelo Ideal
$\delta\epsilon - E_{ABS}$ (V)	$\delta\epsilon - E_{ABS}$ (V)
1,80E-05	1,02E-03
1,80E-05	1,23E-03
2,00E-05	1,43E-03
2,20E-05	1,62E-03
2,30E-05	1,82E-03
3,70E-05	2,01E-03
4,00E-05	2,20E-03
4,10E-05	2,39E-03
4,30E-05	2,58E-03
4,10E-05	2,76E-03
4,30E-05	2,94E-03
4,20E-05	3,12E-03
4,20E-05	3,29E-03
4,20E-05	4,89E-03
4,30E-05	3,46E-03
4,30E-05	3,63E-03
1,07E-04	3,79E-03
1,15E-04	4,18E-03
1,14E-04	4,55E-03

Fonte: Os autores.

Para o caso do modelo ideal, com base em toda a discussão feita ao longo do trabalho, a principal causa que podemos apontar para explicar os resultados obtidos é que tal modelo não leva em consideração, no cálculo do campo magnético gerado pelo solenoide externo, o fato de que seus raios e os comprimentos apresentam a mesma ordem de magnitude. Já para o caso do modelo proposto, embora a discrepância tenha sido reduzida de forma significativa, os dados sugerem que ainda existem fontes de erros sistemáticos. Da perspectiva dos requisitos que fundamentaram a dedução do modelo, podemos apontar as seguintes causas: os solenoides não estavam bem alinhados, de modo que os pontos que definem a metade dos seus comprimentos não estavam coincidindo; e a ausência de uma perfeita concentricidade. De todo modo, os resultados mostraram-se bastante satisfatórios para aplicações daquele arranjo em atividades

práticas, envolvendo o tema da indução mútua entre solenoides concêntricos no âmbito do laboratório didático.

5. Considerações finais

Os resultados constatados fornecem fortes indícios de que o modelo matemático deduzido para o cálculo da indutância mútua entre dois solenoides concêntricos, com base nas prerrogativas que fundamentaram sua dedução, descreve satisfatoriamente o comportamento do fenômeno estudado. Ficou evidente que tais resultados dependeram fortemente da definição da fração (λ) do raio do solenoide interno no cálculo da integral ao longo do parâmetro radial. Essa constatação pode ser explicada sob a perspectiva das linhas de campo magnético do solenoide externo, já que tais linhas são mais uniformes próximo ao centro comum dos solenoides. É indubitável que tal fração pode ser modificada de acordo com o conjunto de solenoides concêntricos utilizado. Portanto, aqueles que tiverem o intuito de investigar o fenômeno da indução mútua entre dois solenoides jungidos de tal forma podem utilizar os protocolos de execução apresentados neste trabalho, obedecendo ao seguinte procedimento: com base nos dados observados para a força eletromotriz induzida, define-se a fração do raio do solenoide interno de modo que as discrepâncias entre os resultados experimentais e os previstos pelo modelo sejam minimizadas. Essa definição pode ser encarada como uma calibração do arranjo experimental e, por conseguinte, tal arranjo pode ser utilizado para investigar outros fenômenos eletromagnéticos, nos quais a expressão matemática que descreve a indutância mútua entre solenoides concêntricos, para casos não ideais, seja relevante.

Além disso, a investigação dos fenômenos de indução, por meio do arranjo experimental proposto, pode ser realizada nos moldes da Atividade Experimental Problematizadora (APE) discutida por Silva *et al.* (2021). Outrossim, é possível aplicar tal arranjo para realizar uma estimativa da permeabilidade magnética de materiais, bastando, para tanto, preencher o interior dos solenoides com algum fluido e determinar a sua permeabilidade relativa ou construir uma versão com solenoides menores e preenchê-los com limalha de ferro.

6. Referências

FACHIN, O. **Fundamentos de metodologia**. 5. ed. Editora Saraiva, São Paulo, 2005.

GARCIA, L. R. **Determinação do desempenho de sistemas de transferência de energia sem fio sem medição direta no lado da carga**. 2022. 96 f. Tese – (Doutorado em Engenharia Elétrica e Informática Industrial), Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Curitiba, 2022. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/27872>. Acesso em: 10 ago. 2023.

HUI, S.; ZHONG, W.; LEE., C. A Critical Review of Recent Progress in Mid-Range Wireless Power Transfer. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 29, n. 9, p. 4500–4511, 2014. DOI: 10.1109/TPEL.2013.2249670.

MARTINS, R. A.; DIAS, V. S. Michael Faraday: o caminho da livreria à descoberta da indução eletromagnética. **Ciência e Educação**, v. 10, n. 3, p. 517-530, 2004. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QcVb9BJk6C4RycyjBbLLy3d/?format=pdf>. Acesso em: 15 ago. 2023.

PICHORIM, S. F.; ABATTI, P. J. Design of Coils for Millimeter and Submillimeter-sized Biotelemetry. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 51, n. 8, p. 1487–1489, Aug. 2004. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/15311836/>. Acesso em: 12 ago. 2023.

REHMAN, M.; BAHARUDIN, Z.; NALLAGOWNDEN, P.; ISLAN, B. Design and Analysis of Resonant Wireless Power Transfer System. **MATEC Web of Conferences**, 2018. DOI:10.1051/mateconf/201822502020.

SILVA, A. L. S. *et al.* O teor de sódio nos alimentos: um cenário didático ao ensino da química nos moldes da atividade experimental problematizada (AEP). **ENCITEC - Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**. v. 11, n. 3, p. 178-192, set./dez. 2021. DOI:<http://dx.doi.org/10.31512/encitec.v11i3.573>.

SOMA, M.; GALBRAITH, D. C.; WHITE, R. L. Radio-Frequency Coils in Implantable Devices: Misalignment Analysis and Design Procedure. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, BME-34, n. 4, p. 265-275, Apr. 1987. DOI: 10.1109/TBME.1987.326088.

ZIERHOFER, C. M.; HOCHMAIR, E. S. Geometric Approach for Coupling Enhancement of Magnetically Coupled Coils. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 43, n. 7, p. 708-714, July 1996. DOI: 10.1109/10.503178.